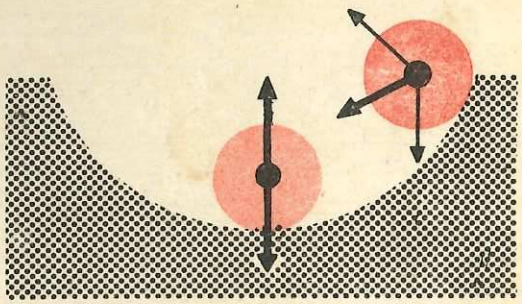
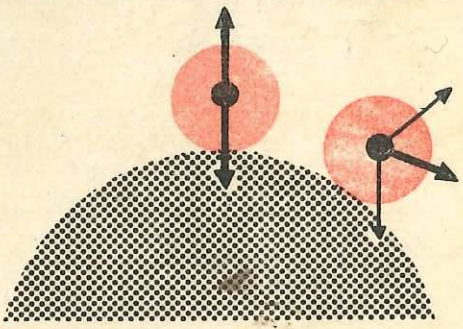
IX

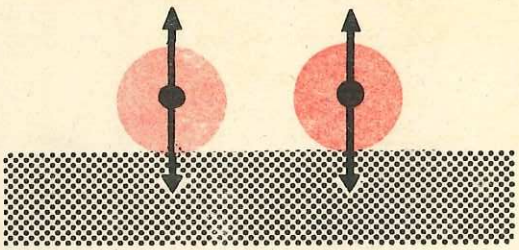
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Fizică

Manual pentru clasa a IX-a

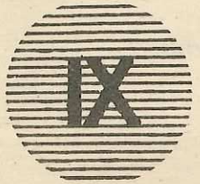






MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

ANATOLIE HRISTEV VASILE FĂLIE DUMITRU MANDA



Fizică

Manual pentru clasa a IX-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat pe baza programei aprobate de M.E.Î. cu nr. 3448/28 IV 1979 şi avizat de Comisia de fizică a M.E.Î.
Revizuit în 1981.

Cap. 1; 2; 3 (§ 1 — 5); 5 şi 6 au fost elaborate de *A. Hristev*
Cap. 4; 8 şi 9 au fost elaborate de *V. Fălie*
Cap. 3 (§ 6 — 8); 7 şi 10 au fost elaborate de *D. Manda*

REFERENŢI:

C. VREJOIU, conf. dr. Facultatea de Fizică — Bucureşti.
C. CRISTESCU, şef de lucrări I.P. Bucureşti
I. POPA, profesor
A. PETRESCU, profesor
PAUL ŞTEFĂNESCU, şef lucrări

Redactor: ELISABETA MESAROŞ prof.
Tehnoredactor: PARASCHIVA GAŞPAR
Coperta: NICOLAE SÎRBU

CUPRINS

CAP. 1. MIŞCAREA ŞI REPAUSUL

1.1. Sistem de referinţă 7
1.2. Punct material 8
1.3. Traiectorie. Coordonate. Legea mişcării 9
1.4. Vector de poziţie 11
1.5. Deplasare 12
1.6. Mărimi vectoriale 14
1.7. Viteza 18
1.8. Acceleraţia 23
1.9. Clasificarea mişcărilor punctului material 26
1.10. Relativitatea mişcării mecanice 27
1.11. Compunerea mişcărilor 28
1.12. Reprezentarea grafică a legii mişcării 29
Probleme rezolvate 31
Întrebări. Exerciţii. Probleme 32

CAP. 2. PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

2.1. Principiul inerţiei 34
2.2. Sisteme de referinţă inerţiale 35
2.3. Principiul fundamental al dinamicii 38
2.4. Principiul acţiunilor reciproce 44
2.5. Principiul suprapunerii forţelor 48
2.6. Principiul relativităţii în mecanica newtoniană 51
Probleme rezolvate 52
Întrebări. Exerciţii. Probleme 57

CAP. 3. MIŞCAREA PUNCTULUI MATERIAL SUB ACŢIUNEA UNOR TIPURI DE FORŢE

3.1. Mişcarea rectilinie uniformă 60
Probleme rezolvate 62
Întrebări. Exerciţii. Probleme 62

3.2. Mişcarea rectilinie uniform variată 64
Probleme rezolvate 69
Întrebări. Exerciţii. Probleme 71
3.3. Mişcarea corpurilor sub acţiunea greutăţii 72
Probleme rezolvate 77
Întrebări. Exerciţii. Probleme 80
3.4. Forţele de frecare 83
Probleme rezolvate 92
Întrebări. Exerciţii. Probleme 94
3.5. Mişcarea circulară uniformă 96
Problemă rezolvată 105
Întrebări. Exerciţii. Probleme 106
3.6. Forţe elastice 108
Probleme rezolvate 111
Întrebări. Exerciţii. Probleme 112
3.7. Legea atracţiei universale a lui Newton. Cîmpul gravitaţional 113
3.8. Masa gravifică. Relaţia dintre masa gravifică şi masa inerţială. Sateliţii artificiali 119
Problemă rezolvată 122
Întrebări. Exerciţii. Probleme 122

CAP. 4. ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ŞI A SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE

4.1. Lucrul mecanic efectuat la mişcarea punctului material într-un cîmp de forţe 124
4.2. Energia cinetică. Teorema variaţiei energiei cinetice a punctului material 135
4.3. Energia potenţială a punctului material în cîmp conservativ de forţe. Energia mecanică a punctului material în cîmp conservativ de forţe 139
4.4. Conservarea energiei mecanice 144
4.5.* Sisteme de puncte materiale. Forţe interne şi forţe externe 145
Probleme rezolvate 147
Întrebări. Exerciţii. Probleme 148

CAP. 5. IMPULSUL MECANIC

5.1. Teorema impulsului pentru punctul material. Conservarea impulsului 153
5.2. Teorema impulsului şi legea conservării impulsului pentru un sistem de două particule 154
5.3.* Teorema impulsului şi legea conservării impulsului pentru un sistem oarecare de particule 155
5.4. Centrul de masă al unui sistem de două particule 156

5.5.* Centrul de masă al unui sistem oarecare de particule 158
5.6. Ciocniri 159
Probleme rezolvate 167
Întrebări. Exerciţii. Probleme 168

CAP. 6. MOMENTUL CINETIC

6.1. Momentul forţei. Momentul cinetic al punctului material 172
6.2. Teorema momentului cinetic pentru punctul material. Conservarea momentului cinetic 177
6.3*. Teorema momentului cinetic total al unui sistem mecanic. Conservarea momentului cinetic total 178
Întrebări. Exerciţii. Probleme 179

CAP. 7*. CINEMATICA ŞI DINAMICA RIGIDULUI

7.1. Noţiunea de rigid 181
7.2. Viteza şi acceleraţia unghiulară 181
7.3. Energia cinetică de rotaţie. Momentul de inerţie al unui rigid 184
7.4. Legile cinematicii şi dinamicii solidului rigid 186
Probleme rezolvate 190
Întrebări. Exerciţii. Probleme 192

CAP. 8. ECHILIBRUL MECANIC AL CORPURILOR

8.1. Sistem de forţe concurente. Rezultanta. Mişcarea de translaţie .. 193
8.2. Compunerea forţelor paralele. Cuplul de forţe. Mişcarea de rotaţie .. 197
8.3. Centrul de greutate 204
8.4. Echilibrul mecanic. Condiţii de echilibru 208
8.5. Echilibrul în cîmp gravitaţional. Echilibrul şi energia potenţială .. 217
Întrebări. Exerciţii. Probleme 220

CAP. 9. MECANICA FLUIDELOR

9.1. Starea fluidă 225
9.2. Noţiunea de presiune 226
9.3. Statica fluidelor: hidrostatica şi aerostatica 227
9.4. Dinamica fluidelor 244
Întrebări. Exerciţii. Probleme 252

CAP. 10. UNDE ELASTICE. NOŢIUNI DE ACUSTICĂ

10.1 Oscilatorul liniar armonic. Compunerea oscilaţiilor 255
10.2. Pendulul gravitaţional. Rezonanţa 267
10.3. Propagarea mişcării oscilatorii 270

10.4. Unde transversale, unde longitudinale. Viteza de propagare 274
10.5. Ecuaţia undei plane 282
10.6. Clasificarea undelor elastice după frecvenţă 285
10.7. Condiţii de audibilitate a oscilaţiilor elastice 285
10.8. Reflexia şi refracţia undelor 286
10.9. Difracţia 292
10.10. Interferenţa. Unde staţionare 293
10.11.* Coarde şi tuburi sonore 300
Întrebări. Exerciţii. Probleme 302
Probleme recapitulative 307

1

MIŞCAREA ŞI REPAUSUL

Fizica studiază diferite fenomene ale naturii: mecanice, termice, electrice, optice, atomice etc. Cel mai simplu dintre ele este *mişcarea mecanică*, studiată în cadrul *mecanicii.*

Mecanica, numită *clasică newtoniană*, a fost elaborată în esenţă de ISAAC NEWTON (1643—1727) şi expusă în celebra sa carte *„Principiile matematice ale filozofiei naturale"* (1687), unde sînt formulate cele trei legi sau *principii* ale mecanicii, precum şi legea atracţiei universale (gravitaţionale) (aplicată la mişcarea sistemului solar).

Mecanica se împarte de obicei în trei capitole: *cinematica* se ocupă cu descrierea geometrică, spaţio-temporală, a mişcării (coordonate, timp, traiectorie, viteză, acceleraţie); *dinamica* studiază şi cauzele mişcării (forţele, impulsul, lucrul mecanic, energia); *statica* studiază echilibrul corpurilor. Mecanica se mai împarte în: mecanica punctului material, mecanica sistemului de puncte materiale, mecanica solidului rigid, mecanica fluidelor etc.

În capitolul 1 sînt expuse noţiuni de cinematică a punctului material.

1.1. SISTEM DE REFERINŢĂ

Deplasările oamenilor, mişcările diferitelor piese ale maşinilor unelte, deplasarea vehiculelor, curgerea apelor, curenţii de aer — iată exemple de *mişcări mecanice.*

Cînd vorbim de mişcarea mecanică a unui corp, înţelegem totdeauna schimbarea poziţiei sale *faţă de alte corpuri*, de obicei faţă de Pămînt sau faţă de diferite obiecte fixe pe Pămînt (case, borne kilometrice etc.).

Se numeşte *mişcare mecanică* a unui corp schimbarea poziţiei sale faţă de alte corpuri.

Repausul este un caz particular al mişcării: un corp este în repaus dacă poziţia sa faţă de alte corpuri nu se schimbă.

Pentru a studia mișcarea unui corp trebuie să alegem totdeauna un alt corp, numit *corp de referință* (de exemplu, Pămîntul), la care să raportăm în fiecare moment poziția corpului studiat. Desigur, orice corp de referință este la rîndul său în mișcare față de alte corpuri. Pentru a determina *poziția* corpului studiat la diferite *momente* sînt necesare o *riglă* și un *ceasornic*.

Corpul de referință, împreună cu rigla pentru determinarea poziției corpurilor studiate și cu ceasornicul pentru indicarea momentului, constituie un *sistem de referință*, numit pe scurt *referențial*.

1.2. PUNCT MATERIAL

În mișcarea mecanică a corpurilor nu sînt determinante unele proprietăți ale acestora, de exemplu, cele termice, cele optice, și de aceea le putem neglija. În multe probleme nu ne interesează nici deformarea corpurilor, de exemplu, la căderea și aruncarea obiectelor, de aceea în astfel de probleme o putem neglija, considerînd corpul *rigid*.

Mișcarea solidului rigid este totuși complicată, de aceea se studiază mai întîi mișcarea unui corp ale cărui dimensiuni și rotații proprii sînt neglijabile în problema dată. Acesta este *punctul material*, caracterizat numai prin *masa* sa (deci un corp cu dimensiuni neglijabile față de distanțele sale pînă la corpurile înconjurătoare).

Un același corp poate fi considerat punct material într-o problemă și într-o altă problemă, *nu*.

De exemplu, în mișcarea unui vapor pe ocean, dimensiunile sale nu sînt esențiale și pot fi neglijate (fig. 1.1), însă în cazul manevrării în rada unui port, ele nu pot fi neglijate. O piatră în mișcarea sa în atmosferă poate fi

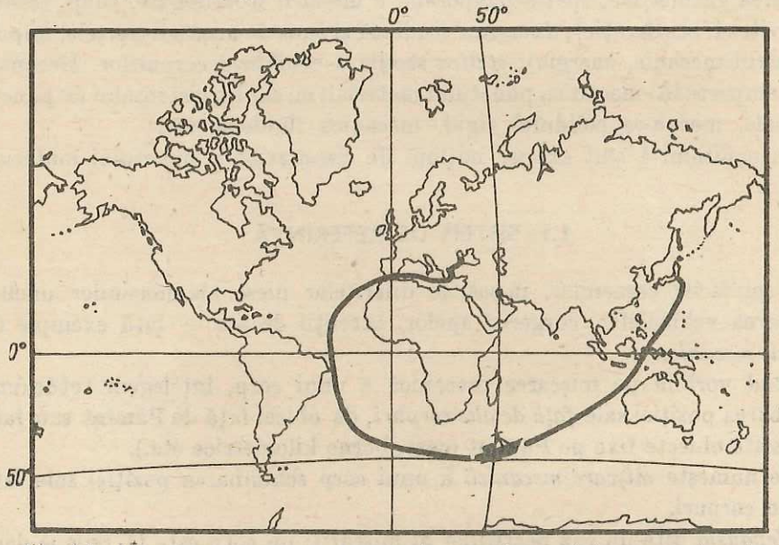


Fig. 1.1. Un vapor pe un ocean se poate aproxima printr-un punct a cărui poziție în fiecare moment este dată de coordonatele sale geografice: latitudinea și longitudinea.

aproximată de cele mai multe ori printr-un punct material, nu însă, de exemplu, în cazul rostogolirii sale pe o suprafață.

Cînd toate punctele unui corp se mișcă *identic* (mișcarea de *translație*), atunci mișcarea unui singur punct oarecare al corpului caracterizează pe deplin mișcarea întregului corp, indiferent de dimensiunile acestuia, deci putem aplica modelul punctului material.

Dacă nu interesează masa corpului (în cinematică), punctul material se numește *mobil*.

1.3. TRAIECTORIE. COORDONATE. LEGEA MIȘCĂRII

Curba descrisă de un mobil în timpul mișcării sale se numește *traiectorie* (fig. 1.2). Traiectoria poate fi rectilinie sau curbilinie. Traiectoria curbilinie poate fi situată: într-un plan — mișcare *plană* (de exemplu, mișcarea circulară), sau în spațiu (de exemplu, mișcarea unui punct periferic al unui șurub).

Mișcarea rectilinie și mișcarea circulară sînt cele mai simple și mai frecvente mișcări.

1.3.1. **Cazul mișcării rectilinii.** Pentru a determina poziția corpului în fiecare moment, alegem pe dreapta mișcării un punct origine O și un sens pozitiv (obținem astfel axa coordonatelor Ox). *Coordonata* x a corpului este distanța de la originea O pînă la corp, prevăzută cu semnul plus sau minus,

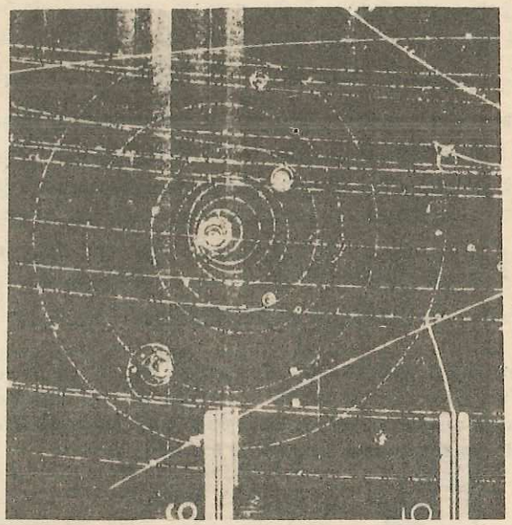


Fig. 1.2. Particulele atomice deplasîndu-se în camera cu ceață determină în drumul lor formarea unor picături fine de apă (vizibile la microscop prin iluminare laterală).

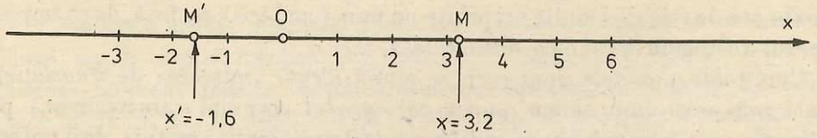


Fig. 1.3. Poziția mobilului pe traiectoria sa rectilinie este determinată de coordonata sa x. Coordonata este pozitivă dacă mobilul se află de partea pozitivă a axei (M) și este negativă, dacă mobilul este de partea cealaltă (M').

după cum corpul se află de partea pozitivă sau de cea negativă a axe (fig. 1.3).

Pentru a descrie mișcarea mobilului pe traiectoria sa rectilinie trebuie să cunoaștem poziția mobilului în fiecare moment pe această traiectorie, adică coordonata sa x în funcție de timpul t:

$$x = f(t).$$

Această expresie constituie *legea mișcării* (ecuația cinematică a mișcării).

1.3.2. **Cazul mișcării într-un plan.** Pentru a determina poziția corpului în fiecare moment, alegem *două axe* de coordonate Ox, Oy, perpendiculare între ele, situate în planul mișcării. Poziția M a corpului este dată de cele *două* coordonate: x (abscisa) și y (ordonata), care se obțin ducînd din M paralele la axele de coordonate (fig. 1.4). Pentru a descrie mișcarea corpului (în plan) trebuie să cunoaștem coordonatele sale (x, y) în funcție de timpul t, adică *două* funcții:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

(ecuațiile cinematice ale mișcării). Fiecare ecuație descrie mișcarea proiecției mobilului pe axa respectivă sau mișcarea mobilului în direcția axei respective (de exemplu, spre Est sau spre Nord). Mișcarea plană a mobilului se descompune astfel în două mișcări rectilinii după cele două axe alese.

Se pot alege și alte sisteme de coordonate pentru a descrie poziția și mișcarea mobilului, de exemplu poziția unui vapor pe ocean este dată de coordonatele sale geografice: latitudinea și longitudinea (fig. 1.1).

1.3.3. **Cazul mișcării în spațiu.** Alegem un sistem de trei axe de coordonate Ox, Oy, Oz, perpendiculare între ele. Atunci poziția mobilului M este dată de *trei* coordonate: x (abscisa), y (ordonata) și z (cota), care se obțin ducînd din M paralele la axe, ca în figura 1.5. Mișcarea corpului în spațiu este descrisă de *trei* ecuații:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

(ecuațiile cinematice ale mișcării).

Ele descriu mișcarea corpului în spațiu după cele trei direcții.

Se pot alege și alte sisteme de coordonate pentru a determina poziția mobilului în spațiu.

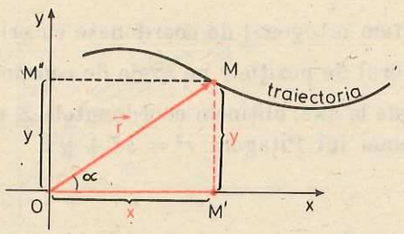


Fig. 1.4. Poziția unui mobil în plan este dată de cele două coordonate ale sale: abscisa $x = OM'$ și ordonata $y = M'M = OM''$. Abscisa x și ordonata y se obțin proiectînd pe axele de coordonate vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, ($x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$). Proiecțiile se obțin ducînd din vîrful vectorului de poziție $\vec{r}$ paralele la axele de coordonate.

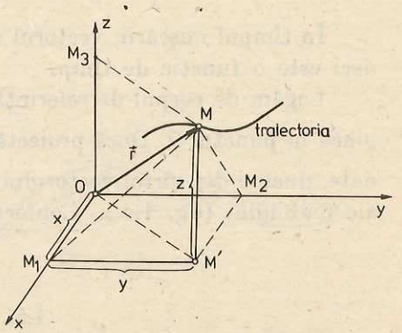


Fig. 1.5. Poziția mobilului în spațiu este dată de cele trei coordonate ale sale: abscisa $x = OM_1$, ordonata $y = M_1M' = OM_2$ și cota $z = M'M = OM_3$. Coordonatele x, y, z se obțin proiectînd pe axele de coordonate vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

1.4. VECTOR DE POZIȚIE

Un alt mod de a preciza poziția unui mobil este următorul: alegem pe corpul de referință un punct-origine O și îl unim cu mobilul M, obținem astfel segmentul de dreaptă orientat $\overrightarrow{OM}$ (fig. 1.4—1.5), numit *vector de poziție* al mobilului, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

El este caracterizat prin:

1) *modul* (sau mărime) dat de lungimea $r = OM$ a segmentului orientat $\overrightarrow{OM}$;

2) *direcție*, dată de dreapta definită de punctele O, M, și

3) *sens*, dat de succesiunea $O—M$, origine-mobil.

Cunoașterea vectorului de poziție (ca modul, direcție și sens) înseamnă cunoașterea poziției în spațiu a mobilului.

De exemplu, o instalație radar determină vectorul de poziție al unui obiect-țintă (avion) cu ajutorul unui impuls de unde electromagnetice (radio) dirijat în spațiu. Știind viteza de propagare a undelor (c = 300 000 km/s) și măsurînd timpul de propagare dus-întors a semnalului, găsim distanța r pînă la obiect. Direcția este dată de orientarea antenei emițătoare (fig. 1.6).

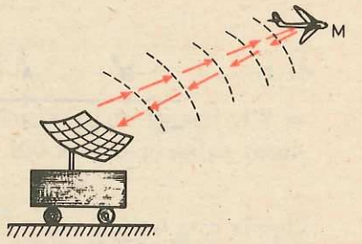


Fig. 1.6. Instalația radar determină vectorul de poziție al obiectului reperat.

În timpul mișcării, vectorul de poziție se schimbă ca modul și orientare, deci este o funcție de timp.

Legăm de corpul de referință un sistem ortogonal de coordonate cu originea în punctul O. Dacă proiectăm vectorul de poziție $\vec{r}$ pe axele de coordonate, ducînd din vîrful vectorului $\vec{r}$ paralele la axe, obținem coordonatele x, y ale mobilului (fig. 1.4). Conform teoremei lui Pitagora $r^2 = x^2 + y^2$.

1.5. DEPLASARE

1.5.1. **Cazul mișcării rectilinii.** Fie $A(x_1)$ și $B(x_2)$ pozițiile mobilului la momentele t_1, respectiv t_2 (fig. 1.7). Deplasarea mobilului în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ este segmentul AB (prevăzut cu semn) $\Delta x = x_2 - x_1$. Litera Δ (delta majusculă) scrisă în fața unei mărimi înseamnă variația acelei mărimi, adică diferența dintre valoarea finală și cea inițială.

Deplasarea mobilului în mișcarea rectilinie este variația coordonatei sale.

Deplasarea Δx este pozitivă dacă mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei ($\Delta x > 0$, $x_2 > x_1$) și negativă dacă mobilul se mișcă în sensul negativ ($\Delta x < 0$) (fig. 1.7).

1.5.2. **Cazul mișcării plane.** Fie A, B pozițiile mobilului la momentele t_1, respectiv t_2 (fig. 1.8). Dacă urmărim proiecțiile mobilului pe axe, se vede că $A'B' = \Delta x = x_2 - x_1$, respectiv $A''B'' = \Delta y = y_2 - y_1$, reprezintă deplasările în direcțiile axelor respective.

Unind poziția inițială $A(t_1)$ a mobilului cu cea finală $B(t_2)$ obținem segmentul de dreaptă orientat $\overrightarrow{AB}$ care se numește *vectorul deplasare* al mobilului în intervalul de timp considerat $\Delta t = t_2 - t_1$.

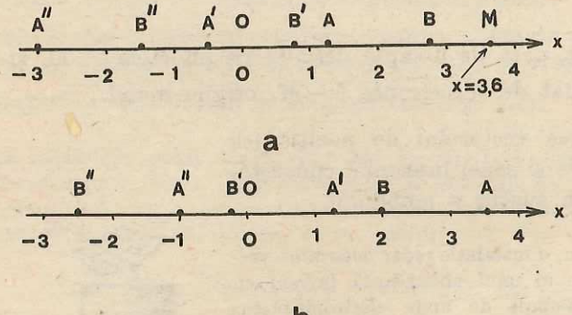


Fig. 1.7. Deplasările AB, $A'B'$, $A''B''$ ale mobilului M în cazul (a) sînt pozitive (mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei Ox), în cazul (b) sînt negative (mobilul se mișcă în sensul negativ al axei Ox).

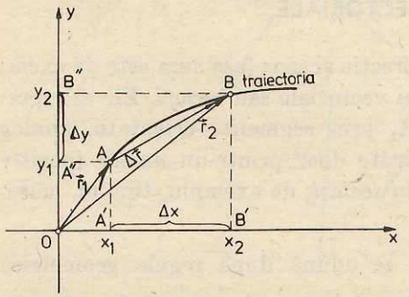


Fig. 1.8. Vectorul deplasare al mobilului $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ are drept componente deplasările pe axe $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ care se obțin prin proiecție, ducînd din originea A și vîrful B paralele la axele de coordonate.

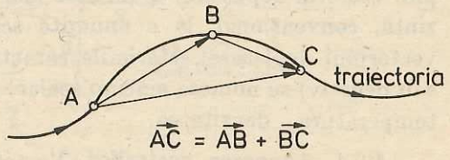


Fig. 1.9. Deplasarea rezultantă $\overrightarrow{AC}$ este suma vectorială a deplasărilor componente $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$.

El este caracterizat de *modul* (lungimea segmentului AB), *direcție* (dată de dreapta care trece prin A și B) și *sens* (de la A la B).

Dacă proiectăm vectorul deplasare $\overrightarrow{AB}$ pe axele de coordonate, ducînd din originea A și din vîrful B paralele la axele de coordonate, obținem deplasările pe axele de coordonate:

$$A'B' = \Delta x = x_2 - x_1,\ A''B'' = \Delta y = y_2 - y_1.$$

Fie un mobil care se mișcă pe o traiectorie curbilinie oarecare (fig. 1.9) și fie A, B, C pozițiile sale succesive la momentele t_1, t_2, t_3. Deplasarea în intervalul de timp (t_1, t_2) este vectorul $\overrightarrow{AB}$, iar în intervalul de timp (t_2, t_3) este $\overrightarrow{BC}$. Care este deplasarea „globală" sau rezultantă în intervalul de timp (t_1, t_3)?

Evident, este vectorul $\overrightarrow{AC}$, care se obține unind originea primei deplasări cu vîrful ultimei deplasări. Se spune că vectorul deplasare $\overrightarrow{AC}$ este *suma* vectorilor deplasare $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \qquad (1.1)$$

De exemplu, un avion se deplasează de la București la Pitești $AB = 105$ km și apoi de la Pitești la Brașov $BC = 100$ km. Deplasarea rezultantă București—Brașov este $AC = 140$ km.

Se vede că mărimea deplasării rezultante $\overrightarrow{AC}$ nu se obține prin simplă adunare *aritmetică* a mărimilor deplasărilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$, ci după regula geometrică de mai sus.

1.6. MĂRIMI VECTORIALE

Mărimile caracterizate prin modul, direcție și sens (așa cum este de exemplu, vectorul deplasare) se numesc mărimi vectoriale sau *vectori*. Ele se reprezintă, convențional, la o anumită scară, prin segmente orientate (analog vectorului deplasare). Mărimile caracterizate doar printr-un *număr* (pozitiv sau negativ) se numesc mărimi scalare sau *scalari*, de exemplu, timpul, masa, temperatura, densitatea.

1.6.1. **Adunarea vectorilor.** Vectorii se adună după regula geometrică dată la vectorii deplasare. Pentru a aduna doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ îi desenăm (la o anumită scară) unul cu originea în extremitatea celuilalt și unim originea primului vector cu vîrful celui de-al doilea vector (fig. 1.10). Acest vector de închidere va da suma celor doi vectori.

Dacă în figura 1.10 ducem din originea primului vector $\vec{a}$ un vector paralel și egal cu vectorul $\vec{b}$, obținem un paralelogram a cărui diagonală reprezintă suma celor doi vectori. De aici rezultă:

Regula paralelogramului. *Suma a doi vectori este dată de diagonala paralelogramului construit cu cei doi vectori componenți ca laturi, avînd origine comună.*

Din această construcție se vede că suma vectorială este *comutativă*:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \tag{1.2}$$

Dacă avem mai mulți vectori suma lor se obține aplicînd succesiv regula paralelogramului. Același rezultat se obține direct cu ajutorul regulii poligonului.

Regula poligonului. *Suma mai multor vectori este dată de linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenți* (fig. 1.11).

Aplicînd regula paralelogramului sau cea a poligonului pentru trei vectori, ne convingem că adunarea vectorilor este *asociativă:*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \tag{1.3}$$

Orice diagramă de compunere a doi vectori (de exemplu, cea din fig. 1.10) poate fi privită și ca o *descompunere* a unui vector în doi vectori compo-

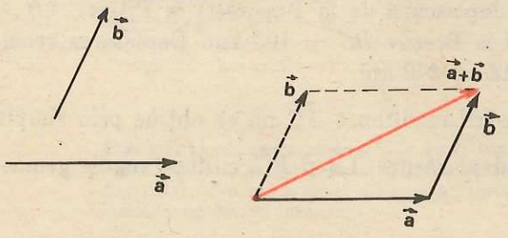


Fig. 1.10. Vectorii se adună după regula paralelogramului.

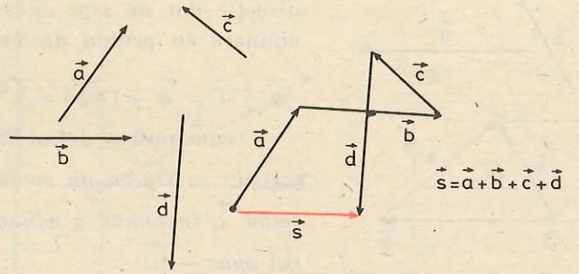


Fig. 1.11. Suma mai multor vectori este dată de linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenți.

nenți. În adevăr, orice vector poate fi descompus după *două* direcții arbitrare *coplanare* cu vectorul dat (sau după *trei* direcții arbitrare *în spațiu*), deci poate fi înlocuit cu vectorii *componenți*. Pentru aceasta ducem prin originea și prin vîrful vectorului dat drepte paralele cu direcțiile date (fig. 1.12). Se formează astfel paralelogramul de compunere a vectorilor.

Astfel, de exemplu, vectorul de poziție $\vec{r}$ din figura 1.4 are drept vectori componenți pe $\overrightarrow{OM'}$ și $\overrightarrow{OM''}$:

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$. Analog în spațiu (fig. 1.5):

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

1.6.2. **Scăderea vectorilor.** Dacă modulul unui vector se reduce la zero, se obține vectorul zero (nul), notat cu 0, ca și numărul zero; direcția vectorului zero rămîne nedeterminată. De exemplu, dacă adunînd mai mulți vectori linia poligonală se închide, suma vectorilor respectivi este zero. În particular, dacă adunăm doi vectori egali în modul, de aceeași direcție dar de sensuri opuse, obținem vectorul zero. De aici se vede că oricărui vector nenul $\vec{a}$ îi corespunde un *vector opus* $\vec{a'} = -\vec{a}$, de același modul, de aceeași

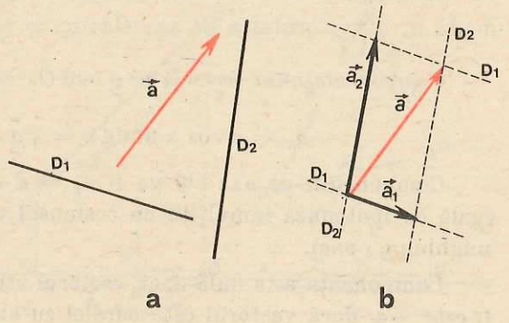


Fig. 1.12. Descompunerea unui vector $\vec{a}$ după două direcții date D_1, D_2 coplanare cu vectorul dat $\vec{a}$.

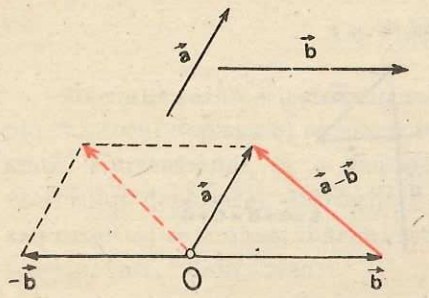


Fig. 1.13. Scăderea vectorilor: diferența este dată de cealaltă diagonală a paralelogramului.

direcție dar de *sens opus*, care prin adunare cu primul dă vectorul zero:

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = 0.$$

Acum putem defini scăderea vectorilor: *a scădea un vector* $\vec{b}$ *dintr-un vector* $\vec{a}$, *înseamnă a aduna la* $\vec{a}$ *vectorul opus* $-\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \qquad (1.4)$$

Din figura 1.13 se vede că diferența a doi vectori este dată de cealaltă diagonală a paralelogramului construit cu cei doi vectori drept laturi.

Pentru a obține diferența a doi vectori, îi trasăm cu origine comună și unim vîrfurile lor, orientînd săgeata spre vectorul descăzut. Ducînd în figura 1.8 vectorii de poziție $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$, se vede imediat, conform regulii de scădere *vectorială*, că vectorul deplasare $\overrightarrow{AB}$ este egal cu *diferența* vectorilor de poziție ai punctelor A, B, anume $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}$, adică *vectorul deplasare este egal cu variația vectorului de poziție.* Prin variația unui vector se înțelege (la fel ca pentru un scalar) *diferența* — bineînțeles *vectorială* — dintre valoarea *finală* și cea *inițială*.

Un vector este *constant* (în timp) dacă nici modulul, nici *direcția* și nici sensul său nu se schimbă în timp. Variația unui vector constant este nulă.

1.6.3. **Componentele unui vector.** Dacă proiectăm ortogonal un vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ pe o axă Ox, coborînd perpendiculare pe axă din originea A și din vîrful B al vectorului (fig. 1.14), obținem un segment $A'B'$, orientat în sensul pozitiv al axei Ox, dacă unghiul α format de vectorul $\vec{a}$ și axa Ox este ascuțit, și orientat în sensul negativ al axei, dacă unghiul este obtuz. Lungimea acestui segment prevăzută cu semnul plus, respectiv minus, se numește componenta a_x a vectorului $\vec{a}$ pe axa Ox: $a_x = (\pm)\ A'B'$.

Componenta unui vector $\vec{a}$ *pe o axă* Ox *este dată de formula:*

$$a_x = a \cos\alpha \text{ unde } a = |\vec{a}|,\ \alpha = \sphericalangle(\vec{a}, Ox). \qquad (1.5)$$

Componenta pe axa Oy va fi $a_y = a \cos\beta = a \sin\alpha$ (o catetă este egală cu ipotenuza înmulțită cu cosinusul unghiului alăturat sau cu sinusul unghiului opus).

Componenta este nulă dacă vectorul este perpendicular pe axă ($\alpha = 90°$) și este $\pm a$, dacă vectorul este paralel cu axa (respectiv $\alpha = 0$ sau $180°$).

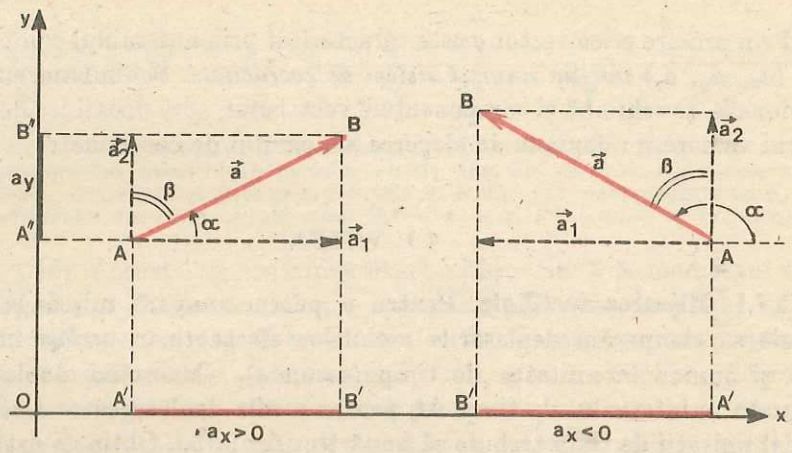


Fig. 1.14. Componentele unui vector pe axele de coordonate.

Dacă adunăm doi vectori $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și proiectăm vectorii pe o axă, obținem aceeași egalitate și pentru componentele lor: $a_x + b_x = c_x$ (fig. 1.15).

În general, orice sumă de vectori poate fi proiectată pe o axă oarecare și se obține o sumă corespunzătoare pentru componentele vectorilor:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n \Rightarrow \text{pr.}\ \vec{a} = \text{pr.}\ \vec{a}_1 + \text{pr.}\ \vec{a}_2 + \ldots + \text{pr.}\ \vec{a}_n,$$
$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx}. \qquad (1.6)$$

Proiecția rezultantei este egală cu suma proiecțiilor vectorilor componenți sau componenta pe o axă a rezultantei este egală cu suma componentelor pe acea axă a vectorilor componenți.

Desigur același rezultat se obține și în cazul *diferenței* a doi vectori. Astfel, componentele vectorului deplasare $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ pe axele de coordonate sînt deplasările pe axe: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ (fig. 1.8). Orice egalitate *vectorială* dă prin proiectare pe axele de coordonate egalități algebrice pentru componentele vectorilor.

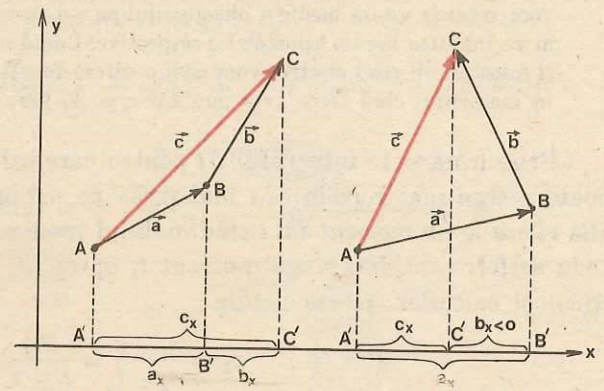


Fig. 1.15. Proiecția sumei a doi vectori este egală cu suma proiecțiilor celor doi vectori.

Prin urmare orice vector $\vec{a}$ este caracterizat prin ansamblul componentelor sale (a_x, a_y, a_z) *într-un anumit sistem de coordonate.* Schimbînd sistemul de coordonate, se schimbă şi componentele vectorului, spre deosebire de un scalar a cărui valoare nu depinde de alegerea sistemului de coordonate.

1.7. VITEZA

1.7.1. **Mişcarea rectilinie.** Pentru a putea compara mişcările între ele trebuie să comparăm deplasările mobilelor efectuate în *acelaşi* interval de timp şi anume în unitatea de timp (secunda). Cunoscînd deplasarea Δx efectuată în intervalul de timp Δt, pentru a afla deplasarea ce *revine* (corespunde) unităţii de timp trebuie să împărţim Δx la Δt. Obţinem astfel viteza medie a mobilului în intervalul de timp considerat:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{deplasare}}{\text{durată}}. \qquad (1.7)$$

Viteza (1.7) are acelaşi semn ca şi deplasarea, deoarece $\Delta t = t_2 - t_1$ este totdeauna pozitiv. Viteza este pozitivă dacă mobilul se mişcă în sensul pozitiv al axei ($\Delta x > 0$, $v_m > 0$) şi este negativă dacă mobilul se mişcă în sensul negativ al axei ($\Delta x < 0$, $v_m < 0$).

EXEMPLU

Un biciclist pleacă din Ploieşti ($x_1 = 60$ km) la ora $t_1 = 8{,}0$ h şi ajunge la Sinaia ($x_2 = 127$ km) la ora $t_2 = 13{,}0$ h. Viteza medie pe această distanţă $\Delta x = x_2 - x_1 =$ $= 67$ km sau pe intervalul de timp respectiv $\Delta t = t_2 - t_1 = 5{,}0$ h este $v_m = \Delta x/\Delta t =$ $= 67$ km/5,0 h $= 13{,}4$ km/h. Dar biciclistul n-a mers tot timpul cu această viteză. La început a mers probabil mai repede, apoi mai încet. Cînd a oprit să se odihnească viteza a fost zero; dacă a pierdut ceva şi s-a întors, viteza a fost negativă. Viteza medie calculată pentru *alte* intervale de timp sau pentru alte distanţe (de exemplu, Ploieşti-Cîmpina, Breaza-Comarnic) a fost *alta*.

Pentru a afla viteza la un moment dat t sau într-un anumit punct x al traiectoriei, de exemplu, viteza biciclistului la Băicoi, în dreptul bornei kilometrice $x = 80$ km, vom măsura viteza medie a biciclistului pe o distanţă *mică*, de exemplu, $\Delta x = 10$ m în vecinătatea bornei kilometrice respective. Luînd o distanţă şi *mai mică*, $\Delta x = 1$ m, şi folosind un ceas electric vom găsi o viteză foarte apropiată de viteza biciclistului în momentul cînd trece prin punctul $x = 80$ km.

Prin urmare, în intervalul Δt pentru care calculăm viteza medie, mobilul poate merge mai repede sau mai încet pe subintervale mai mici. Pentru a afla *viteza la un moment dat* t cînd mobilul trece prin punctul $P(x)$ putem proceda astfel: considerăm un moment t_1 apropiat de t cînd mobilul trece prin $A(x_1)$ şi calculăm viteza medie

$$v_1 = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{PA}{t_1 - t}$$

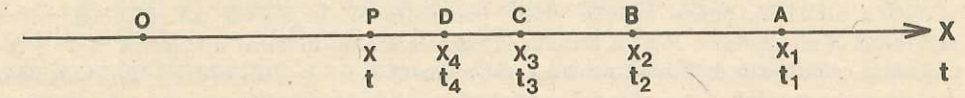


Fig. 1.16. Viteza momentană la momentul t cînd mobilul trece prin punctul $P(x)$ se obţine calculînd viteza medie pe intervale de timp din ce în ce mai scurte: $t_1 - t$, $t_2 - t$, $t_3 - t$ etc., cînd mobilul trece prin punctele A, B, C,... cît mai apropiate de P, deci pentru deplasări din ce în ce mai mici: $PA = x_1 - x$, $PB = x_2 - x$, $PC = x_3 - x$...

(fig. 1.16). Aceasta nu redă încă exact viteza din P la momentul t, deoarece pe segmentul PA în timpul $t_1 - t$ mobilul poate să-şi schimbe viteza. Dacă luăm însă momente t_2, t_3, t_4 etc. din ce în ce mai apropiate de momentul t (deci intervale Δt din ce în ce mai mici), cînd mobilul se află respectiv în punctele $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$ etc. din ce în ce mai apropiate de punctul P (deci deplasări Δx din ce în ce mai mici) şi calculăm vitezele medii corespunzătoare:

$$v_2 = \frac{x_2 - x}{t_2 - t}, \quad v_3 = \frac{x_3 - x}{t_3 - t}, \quad v_4 = \frac{x_4 - x}{t_4 - t} \text{ etc.}$$

obţinem valori care se apropie din ce în ce mai bine de valoarea vitezei la momentul t cînd mobilul trece prin P. Această viteză, care se obţine pînă la urmă prin procedeul indicat, se numeşte *viteză momentană* sau *instantanee*, sau pe scurt, viteză:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta x \text{ şi } \Delta t \text{ sînt foarte mici (descresc către zero).} \qquad (1.8)$$

Figura 1.17 ilustrează un experiment pentru situaţia din figura 1.16.

Viteza momentană diferă în general de la un moment la altul, cum este de exemplu în căderea liberă a unei pietre. La vehicule ea este indicată permanent de vitezometru.

Observăm că în (1.8) viteza momentană v se obţine ca un raport a două mărimi foarte mici Δx şi Δt care descresc simultan către zero (se spune: *tind* către zero şi se scrie: $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$). Deşi Δx şi Δt descresc *fiecare* către zero, *raportul* lor $\Delta x/\Delta t$ nu devine în general zero (viteza momentană nu este în general nulă). Vom conveni să notăm în cele ce urmează raportul a două variaţii foarte mici, care descresc către zero, înlocuind simbolul variaţiei Δ cu simbolul d, astfel de exemplu (1.8) se scrie:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ adică } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0 \text{ (atunci şi } \Delta x \to 0). \qquad (1.9)$$

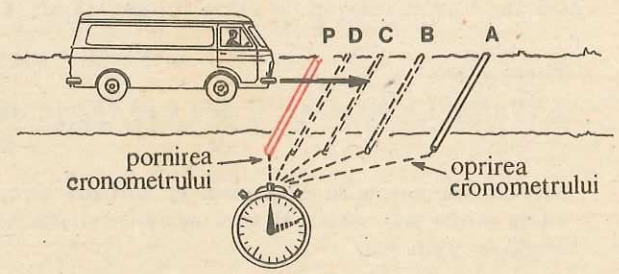


Fig. 1.17. Viteza momentană a unui camion, în momentul t cînd el trece prin punctul P, se poate determina calculînd viteza medie pe distanţe din ce în ce mai mici: PA, PB, PC, PD,... Cronometrul este pornit şi oprit cînd camionul calcă cablurile respective.

Conform procedeului descris, cunoscînd legea mișcării $x = f(t)$ (adică ecuația cinematică a mișcării), putem calcula viteza (momentană). În adevăr, să calculăm viteza mobilului la momentul t. Pentru aceasta să considerăm un moment apropiat $t' = t + \Delta t$. Calculăm coordonata mobilului pentru acest moment t' : $x' = f(t') = f(t + \Delta t)$. Calculăm deplasarea respectivă $\Delta x = x' - x = f(t + \Delta t) - f(t)$, o raportăm la intervalul de timp respectiv $\Delta t = t' - t$ și facem apoi ca Δt să descrească către zero ($\Delta t \to 0$).

EXEMPLE

1. Fie legea mișcării $x = 2t^2 - 3$. Calculăm $x' = 2t'^2 - 3 = 2(t + \Delta t)^2 - 3$. Calculăm deplasarea $\Delta x = x' - x = 2(t + \Delta t)^2 - 3 - (2t^2 - 3) = 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2$ și o raportăm la Δt:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4t\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 4t + 2\Delta t.$$

Făcînd acum pe Δt să descrească (să tindă) către zero ($\Delta t \to 0$), ultimul termen se anulează și obținem viteza (momentană):

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t.$$

2. Mai general, fie legea mișcării

$$x = At^2 + Bt + C, \tag{1.10}$$

unde A, B, C sînt niște constante (numere).
Calculăm coordonata x' pentru momentul $t' = t + \Delta t$:

$$x' = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C = At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t)^2 + Bt + B\Delta t + C,$$

de unde deplasarea $\Delta x = x' - x = 2At\Delta t + B\Delta t + A(\Delta t)^2$ și viteza medie

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2At + B + A\Delta t.$$

Făcînd acum $\Delta t \to 0$, ultimul termen se anulează și viteza devine:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2At + B. \tag{1.11}$$

Prin urmare, dacă legea mișcării este dată de un polinom de gradul II în timp (funcție pătratică de timp) (1.10), viteza va fi un polinom de gradul I în timp (funcție liniară de timp) (1.11). Vom folosi acest rezultat mai tîrziu.

3. Fie legea mișcării

$$x = At + B, \text{ unde } A, B \text{ sînt constante.} \tag{1.12}$$

Calculăm coordonata x' pentru $t' = t + \Delta t$ și apoi deplasarea $\Delta x = x' - x$:

$$x' = At' + B = A(t + \Delta t) + B;\ \Delta x = x' - x = A\Delta t.$$

Viteza medie

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = A = \text{const} = \frac{dx}{dt} = v. \tag{1.13}$$

Nici nu este nevoie să descreștem pe Δt către zero, deoarece raportul este constant; viteza medie este constantă și coincide cu viteza momentană — mișcarea se numește *rectilinie uniformă*.

1.7.2. **Mișcarea plană.** (Analog se studiază mișcarea în spațiu.) Cunoscînd ecuațiile mișcării $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, putem calcula, exact ca mai sus, vitezele medii și momentane ale mobilului *în direcțiile axelor de coordonate*. Notăm vitezele respective cu un indice corespunzător axei:

$$v_{xm} = \frac{\Delta x}{\Delta t},\quad v_{ym} = \frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{1.14}$$

Dacă luăm intervale Δt din ce în ce mai mici, descrescînd (tinzînd) către zero. $\Delta t \to 0$ (atunci și $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$), obținem vitezele momentane:

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt}. \tag{1.15}$$

Pe de altă parte, deplasările Δx și Δy sînt componentele pe axe ale *vectorului deplasare* $\vec{\Delta r}$ (fig. 1.8). Dacă împărțim vectorul deplasare la intervalul de timp (care este un scalar), obținem *vectorul viteză* medie:

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}. \tag{1.16}$$

Vectorul viteză medie are direcția și sensul vectorului deplasare, iar modulul egal cu modulul vectorului deplasare împărțit la intervalul de timp. Componentele vectorului viteză (1.16) pe axe sînt tocmai vitezele (1.14) ale proiecțiilor mobilului.

1.7.3. **Înmulțirea vectorilor cu scalari.** Dacă adunăm un vector $\vec{a}$ cu el însuși obținem un vector de aceeași direcție și același sens, dar de modul dublu, ceea ce se scrie astfel: $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$. La fel pentru mai mulți vectori:

$$\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{\text{de } n \text{ ori}} = n \cdot \vec{a}. \tag{1.17}$$

Dacă punem acum:

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} \text{ și } 0 \cdot \vec{a} = 0, \tag{1.18}$$

obținem prin generalizare regula înmulțirii vectorilor cu numere reale (cu scalari).

Prin *înmulțirea* unui vector $\vec{a}$ cu un număr real r se obține un vector $\vec{ra} = \vec{ar}$ de modul $|r| \cdot |\vec{a}|$ și de aceeași direcție cu $\vec{a}$; sensul va fi *același* cu $\vec{a}$ dacă $r > 0$ și *opus* lui $\vec{a}$ dacă $r < 0$ (fig. 1.18).

A împărți un vector $\vec{a}$ la un număr real $p \neq 0$ înseamnă a-l înmulți cu numărul $\frac{1}{p}$:

$$\frac{\vec{a}}{p} = \frac{1}{p} \cdot \vec{a}, \tag{1.19}$$

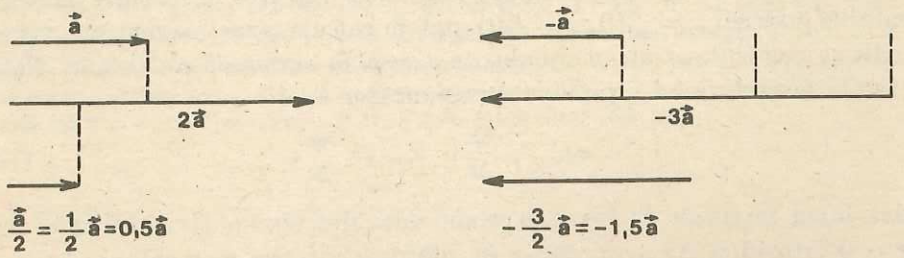


Fig. 1.18. Înmulţirea şi împărţirea vectorilor cu numere (cu scalari).

adică modulul vectorului dat se împarte la $|p|$, direcţia nu se schimbă, iar sensul rămîne acelaşi dacă $p > 0$ şi se inversează dacă $p < 0$. În cazul vitezei (1.16), Δt este totdeauna pozitiv!

Înmulţirea vectorilor cu scalari este *asociativă* şi *distributivă:*

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a},\ (m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a},\ m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}. \quad (1.20)$$

1.7.4. Vectorul viteză. În cazul mişcării *curbilinii* vectorul deplasare $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AA'}$ şi vectorul viteză medie $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, pentru un interval oarecare, au direcţia *secantei* AA' la traiectorie (fig. 1.19). Pentru a obţine viteza *momentană* într-un punct A al traiectoriei trebuie să luăm un interval $\Delta t = t' - t$ foarte mic, descrescînd către zero, atunci punctul A' se apropie de A, iar secanta AA' se roteşte în jurul punctului A (AA', AA'' etc.) pînă cînd devine *tangentă* la traiectorie (cînd punctele A, A' se confundă), deci vectorul viteză momentană

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \textit{adică}\ \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ \textit{cînd}\ \Delta t \to 0, \quad (1.21)$$

este *tangent la traiectorie* în punctul considerat, adică are direcţia tangentei la traiectorie şi sensul dat de sensul mişcării mobilului în acel moment.

Proiectînd punctul material pe axele de coordonate, mişcarea sa curbilinie în spaţiu $\vec{r} = f(t)$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ se descompune în mişcări rectilinii după axele de coordonate, descrise de ecuaţiile cinematice ale mişcării: $x = f_1(t)$,

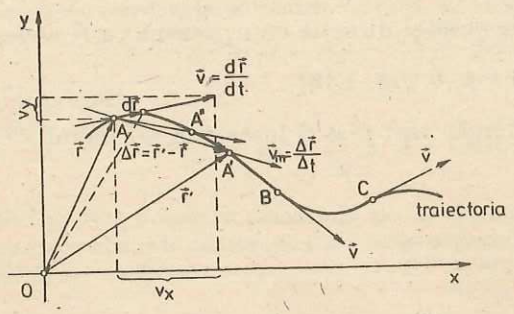


Fig. 1.19. Vectorul viteză medie $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ are direcţia *secantei* la traiectorie: $\overline{AA'}$. Făcînd pe $\Delta t = t' - t$ să descrească către zero, punctul A' se apropie de A (trecînd prin A'' etc.), secanta se roteşte în jurul lui A şi devine *tangentă la traiectorie*, deci vectorul viteză (momentană) $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ este tangent la traiectorie în fiecare moment şi are sensul dat de sensul mişcării.

$y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Vitezele mişcărilor componente sînt componentele vectorului viteză $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ al mobilului.

În cazul plan, aplicînd teorema lui Pitagora, avem $r^2 = x^2 + y^2$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

În cazul mişcării *rectilinii* vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ şi vectorul viteză $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ sînt situaţi chiar pe dreapta mişcării; în locul figurii 1.19 vom avea figura 1.20. Alegînd dreapta mişcării drept axă $O'x'$ şi proiectînd pe această axă vectorii $\Delta\vec{r}$, $\vec{v}_m$, $\vec{v}$, obţinem deplasarea $\Delta x'$, respectiv viteza $v_m = \Delta x'/\Delta t$, $v = dx'/dt$ aşa cum le-am definit în § 1.7.1. Observăm că pentru un vector *paralel* cu o axă, componenta (proiecţia) sa pe acea axă este egală cu plus sau minus modulul vectorului, după cum acesta este orientat în sensul pozitiv sau negativ al axei.

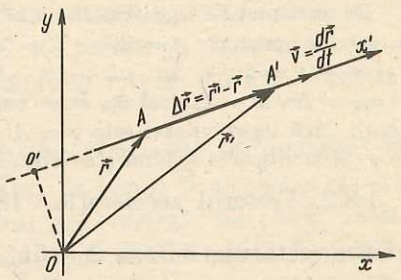


Fig. 1.20. În cazul mişcării rectilinii, vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ şi vectorul viteză $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, respectiv $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, sînt chiar pe dreapta mişcării $O'x'$. Proiectaţi pe această axă, ei dau $\Delta x'$, $v_m = \Delta x'/\Delta t$, $v = dx'/dt$.

Dacă vectorul viteză este constant, mişcarea este rectilinie uniformă (numită pe scurt, uniformă).

1.8. ACCELERAŢIA

În general vectorul viteză se schimbă în timpul mişcării, atît în *modul* — dacă mobilul merge mai repede sau mai încet pe traiectoria sa, cît şi ca *direcţie* — dacă traiectoria este *curbilinie.*

O aceeaşi variaţie a vectorului viteză se poate produce într-un timp mai lung sau mai scurt. Pentru a compara *neuniformitatea* diferitelor mişcări trebuie să calculăm variaţia de viteză în acelaşi interval standard de timp (unitatea de timp). De aceea, vom împărţi variaţia vitezei la intervalul de timp în care ea s-a produs, pentru a afla variaţia vitezei care *revine* (corespunde) *unităţii* de timp.

1.8.1. Acceleraţia în mişcarea rectilinie. În cazul mişcării *rectilinii*, *acceleraţia medie* (în intervalul de timp Δt) este

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{variaţia vitezei}}{\text{intervalul de timp}}. \quad (1.22)$$

Ea poate fi pozitivă sau negativă după semnul lui Δv.

Acceleraţia medie caracterizează variaţia globală a vitezei în intervalul Δt, dar pe subintervale de timp mai scurte variaţia vitezei poate fi diferită. Pentru a caracteriza variaţia vitezei „la un moment dat", vom calcula raportul (1.22) pentru intervale Δt din ce în ce mai mici, descrescînd către zero, şi vom obţine astfel acceleraţia *momentană* (sau instantanee):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0 \text{ adică } a = \frac{dv}{dt}. \quad (1.23)$$

De exemplu, fie legea vitezei: $v = 2t - 5$. Calculăm viteza v' la momentul apropiat $t' = t + \Delta t$, anume $v' = 2t' - 5 = 2(t + \Delta t) - 5$. Calculăm acum variația vitezei $\Delta v = v' - v = 2(t + \Delta t) - 5 - (2t - 5) = 2\Delta t$ și o raportăm la intervalul de timp Δt : $a_m = \Delta v/\Delta t = 2$, deci a_m este constantă și coincide cu accelerația momentană. Mai general, dacă legea vitezei este $v = At + B$, unde A, B sînt constante, rezultă $a_m = a = A$ și mișcarea se numește *rectilinie uniform variată*.

1.8.2. **Vectorul accelerație.** În cazul mișcării în *spațiu*, dacă împărțim variația vectorului viteză $\Delta\vec{v}$ (fig. 1.21) la intervalul de timp Δt în care s-a produs, obținem variația *medie* a vectorului viteză pe unitatea de timp, numită *vectorul accelerație medie:*

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{variația vectorului viteză}}{\text{intervalul de timp}}. \qquad (1.24)$$

El caracterizează global (în medie) variația *vectorului* viteză în intervalul de timp considerat. Dar în subintervale de timp mai mici variația poate fi diferită. La fel ca în cazul vitezei medii și vitezei instantanee, luînd un interval de timp foarte mic (care descrește către zero), obținem *vectorul accelerație momentană* (sau instantanee), numit pe scurt vectorul accelerație.

Vectorul accelerație (momentană) este variația vectorului viteză calculată pentru un interval de timp foarte scurt în jurul momentului care ne interesează și împărțită la acest interval (pentru a obține variația care *revine unității* de timp):

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0, \text{ adică } \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.25)$$

Accelerația medie $\vec{a}_m$ are direcția și sensul vectorului $\Delta\vec{v}$ (fig. 1.21). Cînd îl descreștem pe Δt către zero, vectorul $\vec{a}$ obținut poate diferi, în general, puțin de $\vec{a}_m$ (așa cum $\vec{v}_m$ are direcția secantei, iar $\vec{v}$ are direcția tangentei la traiectorie).

O b s e r v a ț i e. Din figura 1.21 se vede că vectorul accelerație este totdeauna îndreptat spre „interiorul" traiectoriei, adică spre partea concavă

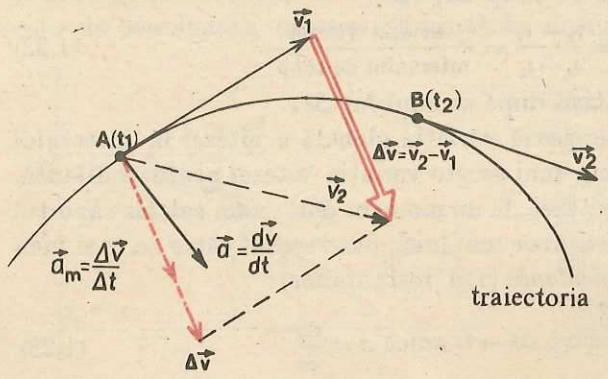


Fig. 1.21. Variația vectorului viteză $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, vectorul accelerație medie $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ și accelerația momentană $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$.

a curbei, în sensul în care deviază vîrful vectorului viteză cînd mobilul se mișcă pe traiectorie. Vectorul accelerație este *paralel* cu vectorul vitezei *numai* în cazul mișcării *rectilinii*, cînd numai modulul vitezei variază, direcția rămînînd neschimbată.

Subliniem încă o dată că accelerația caracterizează sau măsoară *variația vectorului* viteză (calculată pentru unitatea de timp) și *nu viteza* raportată la timp. Dacă vectorul viteză este constant, nu variază, nu avem accelerație, indiferent de valoarea vitezei. Accelerația momentană poate fi nenulă, chiar dacă în acel moment viteza este nulă.

Analog ca pentru vectorul viteză, componenta vectorului accelerație pe o axă reprezintă accelerația mobilului în direcția acelei axe și este egală cu accelerația cu care se mișcă proiecția mobilului pe acea axă, de exemplu:

$$a_{xm} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ și } a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\left(\text{adică } \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0\right). \qquad (1.26)$$

În cazul particular al mișcării *rectilinii*, variația $\Delta\vec{v}$, calculată pentru un interval Δt suficient de mic, deci și vectorul accelerație, este în același sens cu vectorul viteză, dacă modulul vitezei crește (mișcare accelerată) și este în sens opus vectorului viteză, dacă modulul vitezei scade (mișcare încetinită) (fig. 1.22).

Accelerația (1.22—1.23) definită mai sus în cazul mișcării *rectilinii* reprezintă componenta vectorului accelerație $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$, $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ pe dreapta mișcării Ox și este pozitivă dacă vectorul accelerație este orientat în sensul pozitiv al axei. Mișcarea este *accelerată*, dacă viteza v și accelerația a au *același semn*, și *încetinită*, dacă au *semne opuse*.

EXEMPLU

Un tren care se mișcă cu viteza de 90 km/h este la un moment dat frînat astfel încît în 20 secunde viteza sa scade la 18 km/h. Să se calculeze accelerația medie în această mișcare încetinită.

Rezolvare. Alegem sensul pozitiv pe traiectorie în sensul mișcării (al vitezei). Atunci $v_1 = +90$ km/h $= 25$ m/s, $v_2 = +18$ km/h $= 5$ m/s și accelerația medie:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{5 - 25 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = -1\text{m/s}^2.$$

Semnul minus arată că vectorul accelerație este orientat în sensul opus sensului pozitiv ales și cum viteza este pozitivă, semnul este în concordanță cu caracterul încetinit al mișcării ($v > 0$, $a < 0$).

O b s e r v a ț i i. **1.** În cazul mișcării rectilinii, semnul vitezei v și semnul accelerației a depind atît de sensul mișcării mobilului, cît și *de sensul ales pozitiv pe axa mișcării.* Dacă schimbăm sensul pozitiv pe axa mișcării, atît v cît și a își schimbă *amîndouă* semnul (de aceea caracterul accelerat sau încetinit nu depinde de sensul ales pozitiv pe axa mișcării).

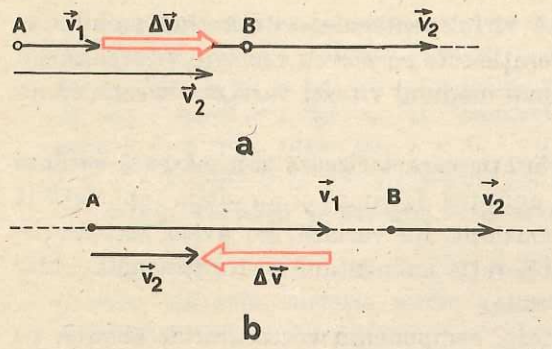


Fig. 1.22. În mişcarea rectilinie accelerată vectorii viteză şi acceleraţie au acelaşi sens (*a*), iar în mişcarea încetinită ei au sensuri opuse (*b*).

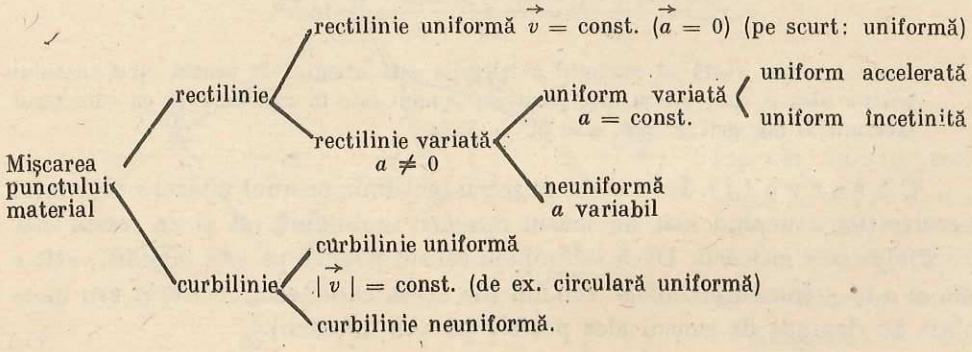
Aproape totdeauna se alege sensul pozitiv pe axa mişcării în sensul *vitezei* (al mişcării); *în acest caz* $a > 0$ înseamnă accelerare şi $a < 0$ înseamnă frînare.

2. În cazul mişcării *rectilinii*, acceleraţia medie, conform formulei (1.22) ne arată cu cît variază *în medie* în unitatea de timp (1 s) viteza corpului (pentru fiecare secundă din intervalul de timp Δt pentru care a fost calculată acea acceleraţie medie). În adevăr, din (1.22) avem $\Delta v = a_m \Delta t$ şi pentru $\Delta t = 1$ s, rezultă $\Delta v = a_m$. De exemplu, dacă acceleraţia unui tren este $a = 2{,}0$ m/s², înseamnă că viteza sa creşte în fiecare secundă cu 2,0 m/s. Caracterul accelerat sau încetinit depinde şi de semnul vitezei: dacă $v > 0$, trenul este accelerat, dacă $v < 0$, el este frînat. *Doar* semnul acceleraţiei *singur* nu ne spune încă despre caracterul accelerat sau încetinit al mişcării.

Iată încă un exemplu. Dacă vectorul acceleraţie al unui lift este îndreptat în sus, aceasta înseamnă *fie* pornire accelerată în sus *fie* frînare la coborîre. Dacă vectorul acceleraţie al liftului este îndreptat în jos, aceasta înseamnă *fie* pornire accelerată în jos *fie* frînare la urcare.

Exemple de acceleraţii. Acceleraţia gravitaţională de cădere liberă a corpurilor pe suprafaţa pămîntului $g = 9{,}8$ m/s², pe suprafaţa Lunii 1,62 m/s², pe suprafaţa Soarelui 271 m/s², pe Marte 3,77 m/s². Acceleraţia unui electron într-un atom de hidrogen $0{,}9 \cdot 10^{22}$ m/s². Un om suportă în mod acceptabil acceleraţii pînă la de cinci ori acceleraţia gravitaţională.

1.9. CLASIFICAREA MIŞCĂRILOR PUNCTULUI MATERIAL



1.10. RELATIVITATEA MIŞCĂRII MECANICE

Am văzut că noţiunile de repaus şi de mişcare nu au sens decît *relativ* la un sistem de referinţă. Acelaşi lucru este valabil şi pentru traiectorie, adică nu numai viteza, ci şi forma traiectoriei depinde de sistemul de referinţă ales. Uneori în loc de sistem de referinţă se spune „observator", fiindcă totdeauna un observator studiază fenomenele faţă de un sistem de referinţă legat de el (sistem de coordonate, riglă şi ceasornic) şi reciproc, putem considera că în oricare sistem de referinţă se află un observator care studiază fenomenele.

Pentru exemplificare se consideră un observator aflat într-un vagon, ce se mişcă orizontal cu viteza constantă $\vec{v}$. Observatorul ţine în mînă un obiect. Pentru observatorul din tren obiectul este în repaus, traiectoria se reduce la un punct, deplasarea şi viteza sînt zero. Pentru observatorul de pe Pămînt, obiectul se deplasează orizontal cu viteza $\vec{v}$ împreună cu trenul şi traiectoria este o dreaptă orizontală.

Dacă observatorul din vagon scapă obiectul din mînă, acesta va cădea vertical în jos faţă de vagon, dar faţă de observatorul de pe Pămînt, obiectul va descrie o traiectorie curbilinie şi vectorul viteză va avea direcţie variabilă în timpul căderii (fig. 1.23).

Un alt exemplu îl constituie un obiect lăsat liber să cadă dintr-un avion (fig. 1.24). Pentru un observator terestru, traiectoria va fi curbilinie, analoagă

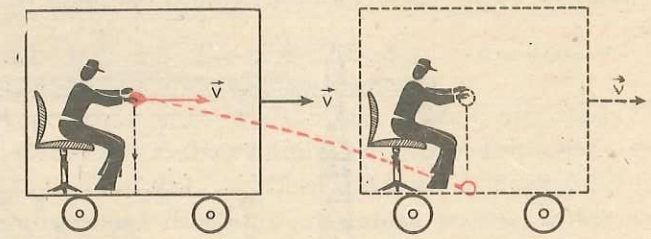


Fig. 1.23. Traiectoria şi viteza unui obiect care cade într-un vagon în mişcare sînt diferite pentru observatorul din vagon şi pentru observatorul de pe Pămînt.

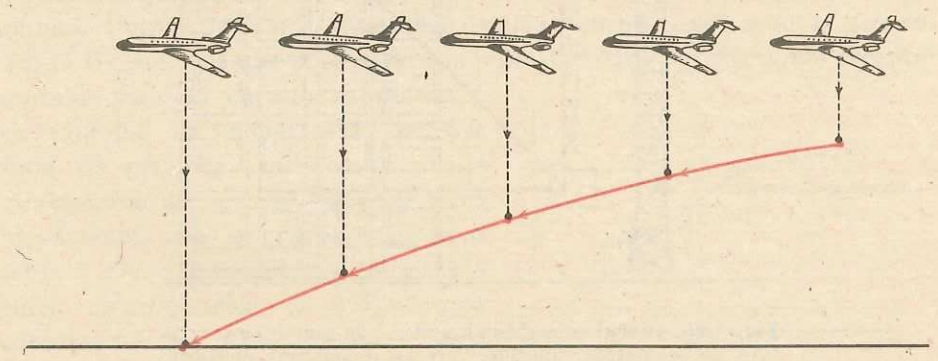


Fig. 1.24. Traiectoria şi viteza obiectului lansat din avion sînt diferite pentru avion şi pentru observatorul terestru.

celei din exemplul precedent, în timp ce pentru aviator traiectoria va fi practic (dacă neglijăm rezistența aerului) o linie verticală, tot timpul sub avion, dacă avionul continuă să zboare orizontal rectiliniu uniform.

Astfel de exemple ne demonstrează relativitatea *traiectoriei*, *deplasării și vitezei.*

1.11. COMPUNEREA MIȘCĂRILOR

Un corp poate participa simultan la două mișcări. Cum se compun ele pentru a da mișcarea rezultantă?

De exemplu, un om se plimbă într-un vagon, care la rîndul său se află în mișcare (sau un obiect cade într-un vagon în mișcare). Cunoscînd cele două mișcări, cum aflăm mișcarea rezultantă a omului (obiectului) față de pămînt? Sau, cunoaștem mișcarea unui satelit artificial față de Pămînt și mișcarea Pămîntului față de Soare, cum calculăm mișcarea satelitului față de Soare?

Alt exemplu: un bloc este ridicat în sus prin intermediul unui scripete și în același timp scripetele se deplasează orizontal de-a lungul brațului macaralei. Care va fi mișcarea (viteza) rezultantă (fig. 1.25)?

Care vor fi deplasarea și viteza rezultantă a bărcii față de mal, dacă se vîslește pe o direcție perpendiculară pe cursul apei unui rîu (fig. 1.26)?

Studiind exemplele de mai sus, constatăm că *deplasările și vitezele se compun după regula paralelogramului, ca orice vectori.*

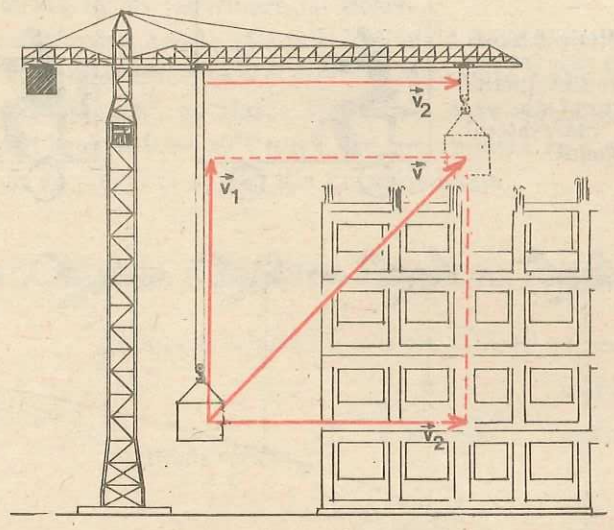


Fig. 1.25. Blocul este ridicat vertical în sus cu viteza $\vec{v}_1$ față de scripetele superior, care se deplasează orizontal cu viteza $\vec{v}_2$. Care este viteza rezultantă $\vec{v}$ a blocului față de pămînt?

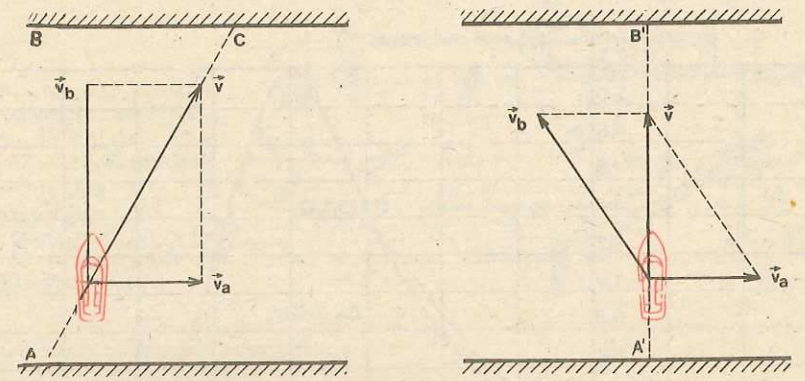


Fig. 1.26. Compunerea vitezelor. Viteza bărcii față de apă $\vec{v}_b$ se compune vectorial cu viteza apei $\vec{v}_a$ pentru a da viteza bărcii față de țărm: $\vec{v} = \vec{v}_b + \vec{v}_a$. Cum trebuie orientată viteza bărcii față de rîu pentru a ajunge *perpendicular* pe celălalt mal? Cînd este posibil aceasta?

1.12. REPREZENTAREA GRAFICĂ A LEGII MIȘCĂRII

Legea mișcării poate fi determinată experimental și reprezentată sub forma unui tabel:

t (în s)	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x (în m)	−0,2	0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,4	2,2	1,2	0	−0,6	0

Este util și sugestiv de reprezentat *grafic* legea mișcării într-o diagramă „coordonată-timp". Pe axa orizontală marcăm timpul t într-o scară convenabilă, iar pe axa verticală — coordonata x într-o altă scară convenabilă (fig. 1.27). Un punct P de pe această diagramă reprezintă poziția, adică coordonata x a mobilului la un moment t. Cînd mobilul se mișcă, poziția sa se schimbă în timp și punctul *reprezentativ* descrie o curbă. Dacă mobilul este în repaus (x fix sau constant în timp) curba reprezentativă devine o linie dreaptă orizontală, paralelă cu axa timpului Ot. Dacă mobilul se depărtează sau se apropie de originea coordonatelor de pe traiectoria sa, curba reprezentativă se depărtează sau se apropie de axa orizontală Ot. Cînd mobilul trece prin originea coordonatelor ($x = 0$), curba reprezentativă taie axa timpului. Curba reprezentativă a legii de mișcare $x = f(t)$ nu are nici o legătură cu traiectoria.

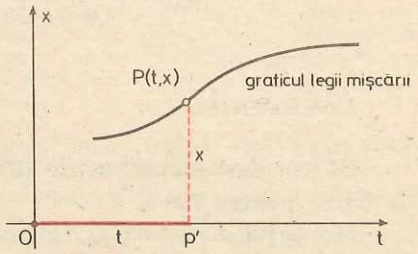


Fig. 1.27. Reprezentarea legii mișcării $x = f(t)$.

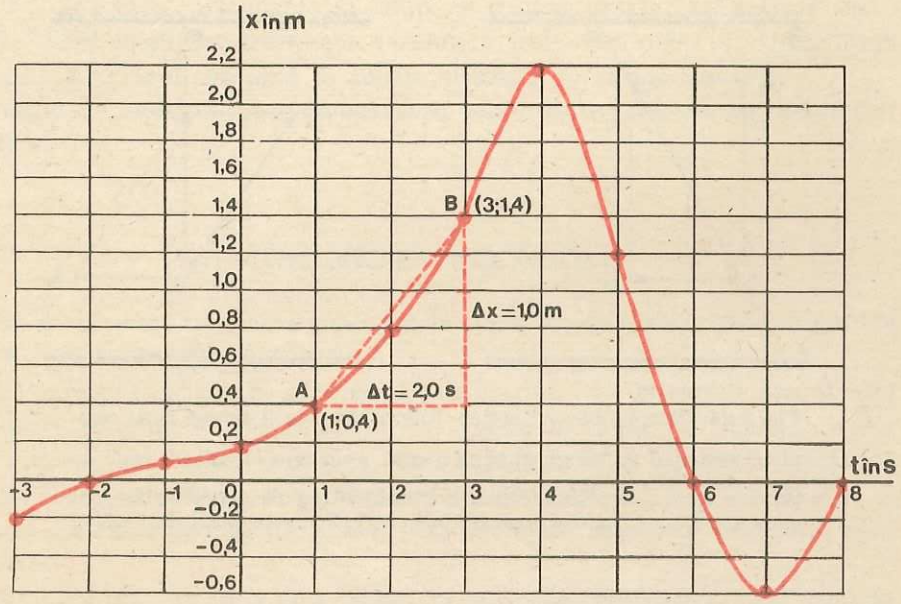


Fig. 1.28. Reprezentarea grafică a legii mișcării $x = f(t)$.

În exemplul din figura 1.28 la momentul (inițial) $t = 0$ mobilul se afla la distanța $x_0 = 0{,}20$ m de origine (coordonata inițială). În „trecut" ($t < 0$) mobilul a trecut prin origine la momentul $t = -2{,}0$ s, venind din partea negativă a traiectoriei. La momentul $t = 4{,}0$ s mobilul se afla la distanța maximă de origine: $x = 2{,}20$ m, după care a început să se apropie de origine foarte repede. La $t = 6{,}0$ s mobilul ajunge în origine și trece de partea cealaltă „negativă" a traiectoriei, depărtîndu-se cel mai mult ($x = -0{,}60$ m) la $t = 7{,}0$ s, după care se întoarce din nou în origine la $t = 8{,}0$ s.

Viteza medie pe diferite intervale de timp se poate calcula din tabel sau din grafic. Astfel, viteza medie în intervalul (1,0; 3,0) s este:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1{,}40 - 0{,}40}{3{,}0 - 1{,}0}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}50 \text{ m/s}.$$

Viteza medie în intervalul (−3,0; 0,0) s este:

$$v_m = \frac{0{,}20 - (-0{,}20)}{0{,}0 - (-3{,}0)}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{0{,}40}{3{,}0}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}13 \text{ m/s}.$$

EXPERIMENTE

Se vor face experimente privind mișcarea rectilinie cu ajutorul Trusei le fizică pentru licee.

Montajul *mecanic* (fig. 1.29) conține o bară (*66*) pe care rulează un cărucior (*27*) a cărui mișcare se studiază. Montajul *electric* (fig. 1.29, 1.30 și 1.31) conține un electromagnet (*20*) pentru reținerea cărucior ului, întrerupătoarele *ND* (*18*)

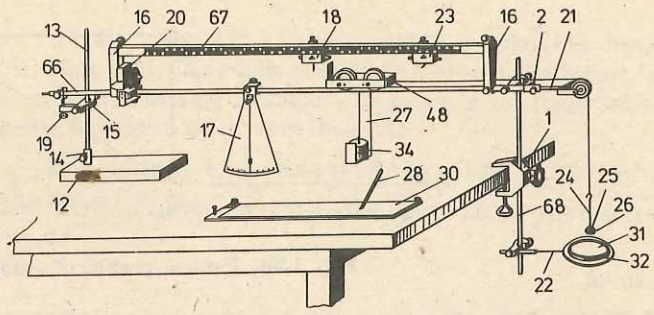


Fig. 1.29. Montaj pentru studiul mișcării rectilinii: *66* — bara de rulare, *27* — cărucior, *67* — riglă gradată, *18* — întrerupător *ND* (*1*), *23* — întrerupător *NI* (*2*), *20* — electromagnet, *28* — inscriptor, *30* — dispozitiv de înregistrare.

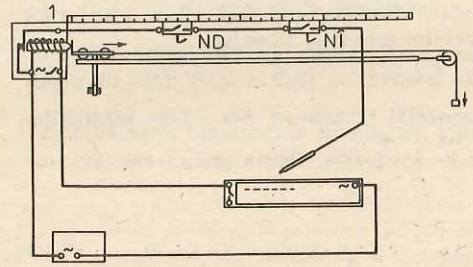


Fig. 1.30. Montajul electric.

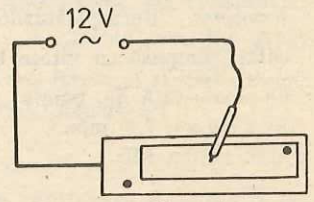


Fig. 1.31. Inscriptorul.

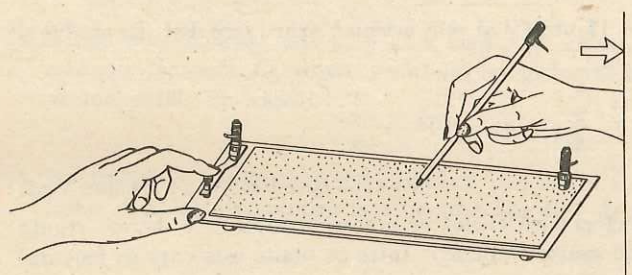


Fig. 1.32. Înregistrarea timpului.

(normal deschis) și *NI* (*23*) (normal închis) și un inscriptor (*28*). Înregistrarea timpului (fig. 1.32) se face printr-o metodă chimică folosind curentul alternativ.

Se fac experiențe de măsurare a vitezei *medii* pe diferite distanțe Δx. Se fixează pe rigla gradată (*67*) întrerupătoarele la această distanță și se măsoară timpul Δt, atunci $v_m = \Delta x/\Delta t$.

PROBLEME REZOLVATE

1. *a)* Putem vîsli pe un rîu astfel încît barca să rămînă pe loc față de mal? *b)* Se poate deplasa un om pe o scară rulantă astfel încît să fie în repaus față de pămînt?

Rezolvare. Dacă barca are față de apă exact viteza apei dar în *sens opus*, ea va rămîne pe loc față de mal. La fel, dacă omul are față de scară o viteză $\vec{v}'$ egală în modul, de aceeași direcție, dar de *sens opus* cu viteza scării $\vec{v}$, adică $\vec{v}' = -\vec{v}$, el va rămîne pe loc față de pămînt.

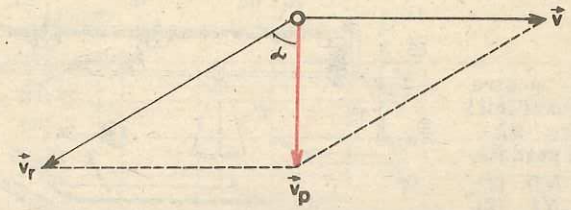


Fig. 1.33. Pentru problema rezolvată *2*.

2. Picăturile de ploaie, care cad vertical, formează pe geamurile unui tramvai în mișcare urme înclinate sub un unghi $\alpha = 60°$ față de verticală. Care este viteza picăturilor de ploaie (față de pămînt) dacă viteza tramvaiului este $v = 12$ m/s?

Rezolvare. Viteza picăturilor de ploaie față de tramvai $\vec{v_r}$ (sub $\alpha = 60°$ față de verticală), compusă cu viteza tramvaiului $\vec{v}$ (orizontală) trebuie să dea viteza picăturilor de ploaie față de pămînt (verticală): $\vec{v_p} = \vec{v_r} + \vec{v}$. Din figura 1.33 rezultă $v_p = v \operatorname{ctg} \alpha = 7{,}0$ m/s.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un vector $\vec{a}$ are modulul $a = 12$ unități și este orientat exact spre Est. Ce modul și ce orientare au vectorii:

$$1{,}5\,\vec{a};\ \frac{\vec{a}}{4};\ -\vec{a};\ -0{,}5\vec{a};\ -\frac{\vec{a}}{3}?$$

R: 18; 3 spre Est; 12; 6; 4 spre Vest.

2. Cum se compun mai mulți vectori dacă ei sînt pe aceeași dreaptă? Ce devine regula paralelogramului în cazul a doi vectori coliniari? Între ce limite este cuprins modulul sumei și diferenței a doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, dacă unghiul dintre ei variază?

R: algebric: $a + b \geqslant |\vec{a} \pm \vec{b}| \geqslant |a - b|$.

3. Pot fi combinați doi vectori de mărimi diferite astfel încît să dea rezultantă (sumă) nulă? Dar trei vectori?

R: nu; da în anumite condiții (cînd reprezintă laturile unui triunghi).

4. Este operația de scădere vectorială, comutativă și asociativă?

R: nu.

5. Cum sînt vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ dacă sînt valabile relațiile: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și $a + b = c$? Dar în cazul $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$? Dar în cazul $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și $a^2 + b^2 = c^2$?

R: $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{b} = 0$; $\vec{a} \perp \vec{b}$.

6. În ce fel de mișcare distanța parcursă coincide cu modulul vectorului deplasare?

R: în mișcarea rectilinie cînd viteza nu schimbă semnul.

7. Suma pe care o plătim la un taxi este proporțională cu: „distanța parcursă" sau cu „modulul vectorului deplasare"?

R: cu distanța parcursă.

8. Pentru mișcarea din figura 1.28 să se calculeze: *a)* viteza medie a mobilului în intervalele de timp: (1, 0; 4,0)s; (4,0; 6,0)s; (6,0; 7,0)s și (6,0; 8,0)s. Pentru ce intervale de timp viteza medie este nulă? *b)* Distanța străbătută de mobil în tot timpul mișcării. Care a fost viteza medie, în modul, pe întregul interval?

R: *a)* 0,60; −1,1; −0,60 și 0,0 m/s; *b)* 5,8 m; 0,53 m/s.

9. Poate un mobil avea o viteză îndreptată spre Est și în același timp o accelerație îndreptată spre Vest sau spre Nord?

R: da.

10. Poate avea un corp viteză nulă, la un moment dat, și accelerație nenulă?

R: da.

11. Poate varia direcția vitezei unui mobil dacă vectorul accelerației este constant?

R: da (vezi fig. 2.16).

12. Un camion, mișcîndu-se curbiliniu, a descris o traiectorie sub forma unui sfert de cerc. Care este distanța parcursă și care este modulul vectorului deplasare?

R: $\pi R/2$; $R\sqrt{2}$.

13. Un vapor se deplasează $d_1 = 7{,}0$ km spre Est, apoi în continuare $d_2 = 3\sqrt{2}$ km spre N—V. Care este deplasarea rezultantă?

R: $d = 5{,}0$ km.

14. Viteza unui biciclist este $v_1 = 14{,}4$ km/h, iar viteza vîntului care îi suflă din față este $v_2 = 4{,}0$ m/s. Ce viteză a vîntului înregistrează biciclistul față de el? Dar dacă vîntul suflă din spate?

R: $v' = v_1 \pm v_2 = 8$, respectiv 0 m/s.

15. Un tractor cu șenile se mișcă cu viteza $v = 3{,}0$ m/s. Care este viteza șenilelor inferioare și a celor superioare față de sol? Dar față de tractorist?

R: *a)* 0 și $2v = 6{,}0$ m/s; *b)* $v = \pm 3{,}0$ m/s.

16. Un avion cu elice zboară rectiliniu uniform. Care va fi traiectoria unui vîrf al elicei în sistemul de referință legat de: *a)* elice; *b)* avion; *c)* pămînt?

R: *a)* punct; *b)* cerc; *c)* elice (ca filetul unui șurub).

17. Ecuațiile mișcării a cinci puncte materiale sînt următoarele $x = 2t$; $x = 2 + 3t$; $x = -1 + 2t$; $x = 2 - t$; $x = 3$. Să se reprezinte grafic aceste ecuații pe *aceeași* diagramă Otx. Ce semnificație au punctele de intersecție a graficului mișcării cu axele Ox, Ot?

R: coordonata inițială (la $t = 0$); momentul trecerii prin origine (cînd $x = 0$).

2

PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

Mecanica clasică, elaborată în esenţă de ISAAC NEWTON (1643—1727) se bazează pe trei legi foarte generale, numite *principii*. Separat de aceste principii NEWTON a formulat principiul suprapunerii forţelor. Toate celelalte legi ale mecanicii newtoniene se deduc atunci din aceste principii ca teoreme.

2.1. PRINCIPIUL INERŢIEI (lex prima)

Un tren se mişcă rectiliniu uniform numai dacă este tras de locomotivă altfel ar merge încetinit şi pînă la urmă s-ar opri. La fel se întîmplă cu diferite alte vehicule.

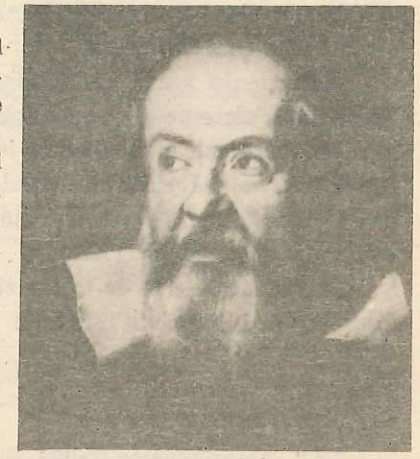
Să facem o experienţă simplă: să lăsăm o bilă de oţel pe un plan orizontal dur şi foarte bine lustruit (din sticlă), vom constata că ea se mişcă (rostogolindu-se) practic *rectiliniu uniform* mult timp. În schimb, o placă de lemn lansată pe un plan orizontal tot din lemn sau din cauciuc se opreşte aproape imediat. De ce? Fiindcă este puternic frînată de planul orizontal aspru (rugos) *prin frecare*, deci *prin acţiunea unui alt corp*.

Dacă am elimina acţiunile tuturor corpurilor înconjurătoare, adică am *izola* un corp aflat în mişcare, s-ar opri el oare?

Pe măsură ce diminuăm frecările şi alte acţiuni ale mediului, constatăm că mişcarea corpului se apropie tot mai mult de mişcarea rectilinie uniformă (de exemplu, mişcarea pe o linie cu pernă de aer). De aici prin idealizare sau abstractizare se ajunge la *principiul I al dinamicii* (principiul inerţiei):

un punct material îşi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă atît timp cît asupra sa nu acţionează alte corpuri care să-i schimbe această stare de mişcare.

Acest principiu a fost descoperit de GALILEO GALILEI în 1632 şi formulat de ISAAC NEWTON drept principiu I al dinamicii (lex prima) (1686).



GALILEO GALILEI (1564—1642) mare învăţat italian, astronom, fizician, mecanician, unul din fondatorii ştiinţelor exacte ale naturii. A descoperit legea inerţiei, legile căderii corpurilor, legile pendulului. Pentru prima dată în istoria astronomiei, cu ajutorul unei lunete confecţionate de el însuşi, a observat corpurile cereşti, descoperind munţii de pe Lună, patru sateliţi ai planetei Jupiter, fazele planetei Venus, structura stelară a Căii Lactee, petele pe Soare. În cartea sa „Dialog asupra celor două sisteme principale ale lumii, ptolemaic şi copernican" (1632) a dezvoltat strălucit învăţătura lui N. Copernic asupra sistemului solar, pentru care în 1633 a fost osîndit de un tribunal catolic.

Cum se explică atunci faptul că în practică mişcarea rectilinie uniformă a vehiculelor trebuie permanent întreţinută prin acţiunea unui agent exterior (motor)? În asemenea cazuri există totdeauna acţiuni opuse mişcării, de obicei frecările, care trebuie învinse sau compensate. În cazul cînd toate acţiunile asupra punctului material se compensează reciproc, acesta rămîne în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă.

2.1.1. **Inerţia şi masa.** Pentru a pune în mişcare un corp, pentru a-l opri sau pentru a-i curba traiectoria (a-i schimba vectorul viteză), trebuie să acţionăm asupra sa. La orice acţiune exterioară care caută să-i schimbe starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă, corpul se opune, reacţionează.

Se numeşte *inerţie* proprietatea unui corp de a-şi *menţine* starea de *repaus* sau de mişcare *rectilinie uniformă* în absenţa acţiunilor exterioare, respectiv de a se *opune* (reacţiona) la orice acţiune exterioară care caută să-i schimbe starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă în care se află.

Principiul I al dinamicii se numeşte şi *principiul inerţiei*, tocmai fiindcă proprietatea enunţată în el este o manifestare a inerţiei: un punct material izolat se află în repaus sau se mişcă rectiliniu uniform în *virtutea inerţiei*. O măsură a inerţiei este *masa*. În această calitate masa se numeşte *inerţială* (sau inertă).

2.2. SISTEME DE REFERINŢĂ INERŢIALE

Dacă un corp izolat se mişcă rectiliniu uniform faţă de stele (sau este în repaus faţă de stele), atunci faţă de Pămînt el se mişcă curbiliniu din cauza rotaţiei proprii diurne a Pămîntului, iar faţă de o navă cosmică, accelerată faţă de stele, el se mişcă accelerat. De aici rezultă evident că principiul inerţiei nu poate fi valabil în orice sistem de referinţă.

Sistemele de referinţă în care este valabil principiul inerţiei se numesc sisteme de referinţă *inerţiale*.

Vom arăta că toate sistemele de referinţă inerţiale se mişcă unele faţă de altele *rectiliniu uniform.*

Experienţa arată că sistemele de referinţă legate de stele sau chiar de Soare sînt sisteme de referinţă inerţiale cu un mare grad de precizie. În schimb, sistemele de referinţă legate de Pămînt nu sînt riguros inerţiale din cauza rotaţiei Pămîntului faţă de stele. În majoritatea covîrşitoare a nevoilor practicii, Pămîntul poate fi însă considerat sistem de referinţă inerţial cu un suficient grad de precizie.

Peste tot, în cele ce urmează, în rezolvarea problemelor, se înţelege că se foloseşte un sistem de referinţă *inerţial* (de obicei legat de Pămînt).

Principiile mecanicii newtoniene sînt valabile în sistemele de referinţă inerţiale (se va arăta la § 2.6).

2.2.1. **Transformarea Galilei.** Un acelaşi eveniment sau proces (de exemplu mişcarea unui punct material) poate fi studiat din două sisteme de referinţă diferite — vom spune, de către doi observatori diferiţi. Un eveniment este caracterizat prin coordonatele sale spaţiale x, y, z, care arată locul unde se produce evenimentul, şi prin coordonata temporală t, care arată momentul la care se produce evenimentul. Fiecare observator măsoară coordonatele evenimentelor cu instrumentele *sale* (rigla şi ceasornicul) şi stabileşte legile corespunzătoare.

Este important de stabilit legătura dintre coordonatele unui eveniment măsurate de diferiţi observatori, adică *transformările de coordonate care dau trecerea de la un sistem de referinţă la altul.*

Astfel putem vedea care aspecte ale fenomenelor şi legilor sînt *relative*, adică dependente de sistemul de referinţă, şi care sînt *invariante*, adică independente de sistemul de referinţă (aceleaşi pentru toţi observatorii).

Vom presupune că riglele şi ceasornicele diferiţilor observatori sînt *construite şi etalonate identic*, adică după aceeaşi „reţetă" (acelaşi procedeu tehnologic).

Fie două sisteme de referinţă S şi S' cu axele paralele (axele Oz, $O'z'$ nu sînt desenate). Presupunem că S' se mişcă faţă de S cu viteza $\vec{u}$ *constantă*, astfel încît originile O, O' au coincis la momentul $t = t' = 0$, unde t este timpul măsurat în S, iar t' în S'.

Din punctul de vedere al observatorului S, aplicînd regula compunerii vectoriale, rezultă conform figurii 2.1:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{r_0} = \vec{r'} + \vec{ut}, \tag{2.1}$$

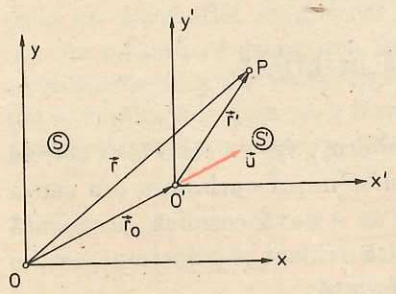


Fig. 2.1. Două sisteme de referinţă care se mişcă rectiliniu uniform unul faţă de altul. Transformările Galilei.

unde toţi vectorii sînt măsuraţi cu instrumentele din S. Noi vrem însă să stabilim legătura dintre coordonatele $(\vec{r}, t)$ ale unui eveniment P, măsurate de observatorul S cu instrumentele *sale*, şi coordonatele $(\vec{r'}, t')$ ale aceluiaşi eveniment dar măsurate de observatorul S' *cu instrumentele* **sale.** Or, instrumentele (rigla şi ceasornicul) din S' se află în mişcare faţă de S! Oare distanţa $O'P$ măsurată de fiecare observator cu instrumentele *sale* va fi aceeaşi?

În mecanica clasică newtoniană se consideră că lungimile (distanţele) şi duratele au caracter

invariant (sau *absolut*) adică rezultatele măsurătorilor de lungime şi durată nu depind nici de mişcarea instrumentelor de măsură, nici de mişcarea obiectelor măsurate.

Această ipoteză este foarte bine verificată în domeniul vitezelor obişnuite (chiar pentru viteze cosmice), dar în domeniul vitezelor foarte mari, apropiate de viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (de exemplu, în cazul particulelor atomice), această ipoteză nu mai este exactă şi trebuie aplicată mecanica relativistă.

Rămînînd în cadrul mecanicii clasice, putem considera că lungimile şi duratele au caracter invariant. Astfel, timpul „curge" la fel în cele două sisteme de referinţă, şi prin alegerea noastră a momentelor iniţiale ($t = t' = 0$) rezultă permanent $t = t'$. În relaţia (2.1) putem considera $\vec{r}$ măsurat în S, iar $\vec{r'}$ *măsurat în* S', astfel încît obţinem următoarele transformări Galilei:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r'} + \vec{ut}, \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r'} = \vec{r} - \vec{ut}, \\ t' = t. \end{cases} \tag{2.2}$$

Din transformările Galilei rezultă imediat legea clasică de compunere a vitezelor. În adevăr, considerînd două poziţii consecutive la două momente succesive, avem:

$$\begin{cases} \vec{r_1} = \vec{r'_1} + \vec{ut_1} \\ t_1 = t'_1 \end{cases} \text{şi} \quad \begin{cases} \vec{r_2} = \vec{r'_2} + \vec{ut'_2} \\ t_2 = t'_2 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{r'_2} - \vec{r'_1} + \vec{u}(t'_2 - t'_1) \\ \Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t'. \end{array}$$

Împărţind ultimele două relaţii membru la membru, găsim legea clasică de compunere a vitezelor:

$$\vec{v_m} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{\Delta r'}}{\Delta t'} + \vec{u} = \vec{v'_m} + \vec{u}, \quad \vec{v} = \vec{v'} + \vec{u}, \tag{2.3}$$

unde $\vec{v'}$ este viteza relativă a mobilului faţă de S', $\vec{u}$ — viteza sistemului S' faţă de S şi $\vec{v}$ — viteza rezultantă faţă de S.

Dacă acum considerăm vitezele la două momente consecutive:

$$\vec{v_1} = \vec{v'_1} + \vec{u}, \quad \vec{v_2} = \vec{v'_2} + \vec{u}, \quad \Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1} = \vec{v'_2} - \vec{v'_1} = \Delta\vec{v'}$$

şi împărţind la intervalul de timp $\Delta t = \Delta t'$, obţinem pentru acceleraţii

$$\vec{a_m} = \vec{a'_m} \text{ şi } \vec{a} = \vec{a'}, \tag{2.4}$$

adică *acceleraţia este aceeaşi în toate sistemele de referinţă în mişcare relativă rectilinie uniformă* ($\vec{u} = \text{const}$), deci acceleraţia este *invariantă* faţă de aceste sisteme.

În particular, dacă acceleraţia este nulă într-un sistem S, adică particula este în repaus sau se mişcă rectiliniu uniform, atunci acceleraţia va fi nulă în oricare alt sistem S' mişcat *rectiliniu uniform* faţă de primul, adică particula va fi în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă în toate aceste sisteme de referinţă aflate în mişcare relativă rectilinie uniformă unele faţă de altele. Dacă principiul inerţiei este valabil într-unul din ele, deci acesta este un sistem de referinţă inerţial, atunci acest principiu va fi valabil în toate aceste sisteme de referinţă, care vor fi de asemenea inerţiale. Reciproc, dacă două sisteme de referinţă sînt inerţiale, atunci ele se mişcă unul faţă de altul rectiliniu uniform [altfel (2.4) n-ar fi valabilă, adică acceleraţia n-ar fi invariantă, deci mişcarea inerţială, cu $\vec{a} = 0$ într-unul din sisteme, ar apărea accelerată în celălalt].

2.3. PRINCIPIUL FUNDAMENTAL AL DINAMICII (lex secunda)

În procesele de *ciocnire* a două corpuri, de *frecare* între două corpuri solide sau între un solid și un fluid, de *atracție sau respingere* între corpuri magnetizate sau electrizate etc., corpurile acționează reciproc, unele asupra altora, adică *interacționează*. Ca efect al interacțiunii corpurile în general se deformează reciproc și se schimbă starea lor de mișcare, adică se schimbă vectorul viteză.

I. NEWTON a explicat căderea corpurilor ca efect al interacțiunii *gravitaționale* dintre corp și Pămînt. Acesta este un caz particular al *interacțiunii gravitaționale* sau *atracției universale* dintre oricare două corpuri. Un corp suspendat de un resort întinde resortul, iar lăsat liber cade accelerat datorită atracției *reciproce* dintre corp și Pămînt.

O măsură a interacțiunii este *vectorul forță*. Astfel, corpurile care interacționează exercită unul asupra celuilalt cîte o forță. Acțiunile diferitelor corpuri înconjurătoare asupra unui corp dat se manifestă prin forțe aplicate acestuia. Prin intermediul forțelor aplicate unui corp se transmite mișcarea mecanică.

Forțele se compun după regula paralelogramului ca orice vectori.

Exemple de forțe. Toate forțele din natură se reduc pînă la urmă la un număr mic de forțe *fundamentale*, corespunzător interacțiunilor fundamentale.

a) Una dintre acestea este *forța de atracție gravitațională*, care se exercită între oricare corpuri și depinde numai de masa lor și de distribuția substanței, indiferent de natura ei chimică.

Legea atracției universale a fost descoperită de Isaac Newton și aplicată la mișcarea corpurilor cerești (1687).

b) Un alt exemplu de forțe sînt *forțele electrice*. Ele sînt forțe de interacțiune între corpurile electrizate. Știm că prin frecare, de exemplu, corpurile se electrizează și între ele se exercită forțe de respingere sau de atracție.

Forțele elastice sînt forțe care apar în corpurile deformate*. Ele se reduc pînă la urmă la forțe *electrice*. În adevăr, prin deformarea unui solid, ionii, atomii sau moleculele sale constituente sînt dislocate din pozițiile lor de echilibru și se nasc forțe *electrice* care tind să restabilească echilibrul.

Forțele de frecare se reduc pînă la urmă tot la forțe *electrice*.

Orice forță aplicată unui corp îi modifică vectorul viteză, adică îi imprimă o *accelerație*. Din experiența de toate zilele știm că *aceeași* forță aplicată diferitelor corpuri produce variații diferite ale vitezei, fiindcă efectul depinde și de *inerția* corpului, adică de *masa* sa. Cu cît masa este mai mare cu atît variația de viteză, la aceeași forță aplicată, în același interval de timp, este mai mică. Ne putem da seama de acest fapt cînd tragem sau împingem cu *aceeași* forță același cărucior gol apoi încărcat.

* Acest tip de forță va fi studiat mai pe larg la § 3.6.

ISAAC NEWTON (1643—1727) a fost un mare fizician, astronom și matematician englez. În celebra sa carte „Principiile matematice ale filozofiei naturale" (1687) a fundamentat și dezvoltat mecanica clasică, formulînd cele trei principii ale mecanicii, precum și legea atracției universale. El a pus bazele mecanicii corpurilor cerești, explicînd mișcările planetelor în sistemul solar. Pentru rezolvarea problemelor mecanicii a elaborat mijloace și metode matematice noi și de o mare însemnătate, punînd bazele calculului diferențial și integral (în același timp și independent de Gottfried Wilhelm Leibniz).

Newton este cunoscut și pentru cercetările sale în domeniul opticii. El a descoperit și a studiat dispersia luminii (descompunerea luminii albe solare în culori). El este autorul unei teorii cu privire la natura luminii care a jucat un rol important în istoria științei (teoria corpusculară).

A perfecționat aparatele optice, a construit pentru prima dată telescoape (cu oglindă) fără aberații cromatice.

Lucrările și concepțiile lui Newton au exercitat o puternică și îndelungată influență asupra întregii fizici; ele au dominat fizica aproape două secole. Prestigiul și succesele lucrărilor lui Newton au influențat imens întreaga istorie, nu numai a științei ci și a culturii în general.

Începînd cu primele decenii ale secolului XX,s-a stabilit că mecanica clasică newtoniană nu este valabilă în domeniul vitezelor foarte mari, comparabile cu viteza luminii în vid (c = 300 000 km/s), precum și în domeniul atomic.

De asemenea, constatăm ușor că aplicînd unui corp, aflat în mișcare *rectilinie*, o forță *în direcția mișcării sale* (a vitezei), nu modificăm caracterul *rectiliniu* al mișcării, adică nu abatem corpul de la traiectoria sa rectilinie, nu curbăm traiectoria, ci doar îl accelerăm sau frînăm pe această direcție (traiectorie). Deci *variația vitezei (accelerația) este în același sens cu forța.*

Dacă însă aplicăm o forță oblic sau perpendicular față de traiectorie (față de viteză), atunci abatem corpul de la mișcarea rectilinie, curbăm traiectoria, modificăm *direcția* vectorului viteză. Astfel se întîmplă de exemplu dacă lovim lateral o bilă de biliard aflată în mișcare sau dacă, în drumul unei bile de oțel care se rostogolește pe un plan orizontal de sticlă, punem lateral un magnet (fig. 2.2).

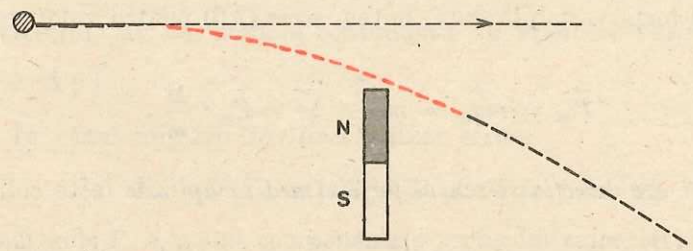


Fig. 2.2. Forța de atracție a magnetului curbează traiectoria unei bile de oțel care se rostogolește pe un plan orizontal.

Chiar din aceste experienţe şi observaţii simple se poate bănui că *acceleraţia imprimată are direcţia şi sensul forţei aplicate, fiind proporţională cu forţa şi invers proporţională cu masa corpului:* $\vec{a} = \text{const.}\ \frac{\vec{F}}{m}$.

Nenumărate experienţe, efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mişcare, cărora li s-au aplicat diferite forţe (gravitaţionale, electrice, elastice etc.), au condus la următorul principiu:

vectorul forţă este proporţional cu produsul dintre masă şi vectorul acceleraţie

$$\vec{F} = \text{const.}\ m\vec{a}.$$

Acesta este conţinutul principiului II al dinamicii, numit şi *principiul fundamental* (lex secunda). Acest principiu a fost formulat de I. NEWTON (împreună cu celelalte principii ale mecanicii) în cartea sa „Principiile matematice ale filozofiei naturale" (1687).

Deoarece unitatea de măsură pentru masă (1 kg) este fixată, fiind chiar unitate fundamentală în SI (Sistem Internaţional de unităţi), iar unitatea de acceleraţie a fost deja stabilită ca unitate derivată (1 m/s^2), vom alege unitatea de forţă astfel încît constanta de proporţionalitate din legea de mai sus să fie 1. Atunci ecuaţia principiului II devine:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{2.5}$$

iar unitatea de măsură pentru forţă va fi egală cu unitatea de masă ori unitatea de acceleraţie:

$$[F] = [m] \cdot [a] = 1\ \text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 1\ \text{N}. \tag{2.6}$$

Această unitate în SI se numeşte newton (N).

Newtonul este egal cu mărimea acelei forţe care aplicată unui corp cu masa de 1 kg îi imprimă o acceleraţie de 1 m/s^2.

Înţelegînd prin forţă medie pe un interval de timp Δt, o forţă constantă care produce aceeaşi acceleraţie medie sau aceeaşi variaţie de viteză pe intervalul Δt ca şi forţa variabilă dată, putem scrie (2.6) pentru valori medii:

$$\vec{F}_m = m\vec{a}_m = m\frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t};\ \vec{\Delta v} = \vec{F}_m \cdot \frac{\Delta t}{m}, \tag{2.7}$$

variaţia vitezei are direcţia şi sensul forţei (medii) aplicate (este coliniară cu forţa).

Dacă forţa aplicată este coliniară cu viteza, variaţia de viteză va fi de asemenea coliniară cu viteza, deci viteza îşi păstrează direcţia, adică mişcarea va fi rectilinie pe direcţia comună a forţei şi vitezei (fig. 2.3, *a*).

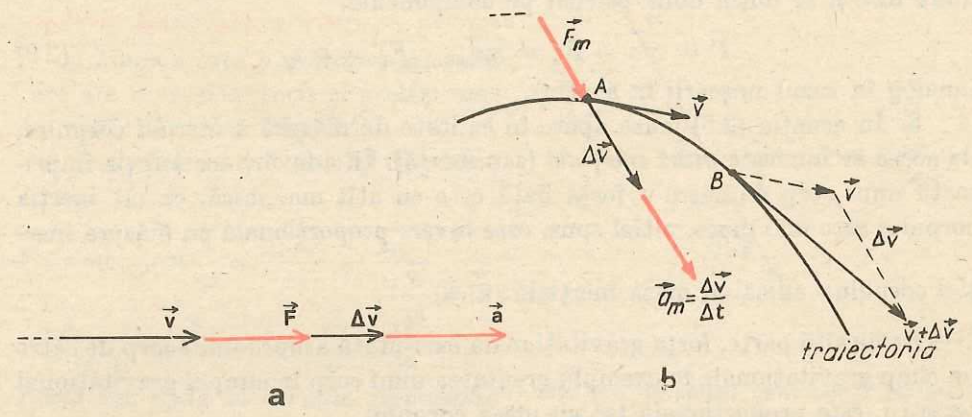


Fig. 2.3. Variaţia vectorului viteză are direcţia şi sensul forţei aplicate. (*a*) Forţa fiind paralelă cu viteza, creşterea de viteză şi acceleraţia sînt pe aceeaşi direcţie şi mişcarea este rectilinie. (*b*) Forţa fiind oblică pe viteză, variaţia de viteză şi acceleraţia au direcţia şi sensul forţei aplicate, deci mişcarea va fi curbilinie.

Dacă însă forţa aplicată este oblică faţă de viteză, variaţia vitezei va fi în direcţia şi în sensul forţei, deci traiectoria se va curba înspre regiunea spre care este îndreptată forţa (fig. 2.3, *b*).

Experimente de verificare a legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$ în două cazuri mai simple, vor fi prezentate la paragrafele următoare: forţă constantă pe direcţia mişcării — mişcare rectilinie uniform variată, § 3.2, şi forţă constantă în modul, perpendiculară pe direcţia mişcării — mişcare circulară uniformă, § 3.5.

2.3.1. **Observaţii în legătură cu principiul II. 1.** Ecuaţia principiului II este o ecuaţie *vectorială.* Variaţia unui vector de exemplu, $\vec{\Delta v}$, nu trebuie confundată cu variaţia modulului Δv (unde $v = |\vec{v}|$). De exemplu, într-o mişcare *curbilinie* uniformă avem $|\vec{v}| = v = \text{const}$, deci $\Delta v = 0$, dar variază *direcţia* vectorului viteză, deci $\vec{\Delta v} \neq 0$ şi $\vec{a_m} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \neq 0$. De asemenea, variaţia modulului, Δv, nu trebuie confundată cu modulul variaţiei vectorului $|\vec{\Delta v}| \neq \Delta|\vec{v}|$.

2. În cazul mişcării *rectilinii* putem scrie:

$$F_m = ma_m = m\Delta v / \Delta t,\ F = m \cdot \mathrm{d}v / \mathrm{d}t, \tag{2.8}$$

unde mărimile F, v, a sînt componentele vectorilor respectivi pe axa mişcării Ox, pozitive dacă vectorii respectivi sînt orientaţi în sensul pozitiv ales pe axă şi negative dacă vectorii respectivi sînt orientaţi în sensul opus.

În cazul mișcării *plane* ecuația vectorială $\vec{F} = m\vec{a}$ se proiectează pe cele două axe și se obțin două ecuații pe componente.

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y \tag{2.9}$$

(analog în cazul mișcării în spațiu).

3. În ecuația (2.5) masa apare în calitate de măsură a *inerției* corpului, de aceea se numește *masă inerțială* (sau inertă). În adevăr, accelerația imprimată unui corp de către o forță dată este cu atît mai mică, cu cît inerția corpului este mai mare, altfel spus, este invers proporțională cu măsura inerției corpului, adică cu masa inerțială: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Pe de altă parte, forța gravitațională exercitată asupra unui corp de către un cîmp gravitațional, de exemplu greutatea unui corp în cîmpul gravitațional terestru, este proporțională tot cu masa corpului:

$$\vec{G} = m\vec{g}. \tag{2.10}$$

Se va arăta mai tîrziu că cele două mase coincid (§ 3.8.1).

Accelerația gravitațională $\vec{g}$ este orientată spre centrul Pămîntului, la fel ca și greutatea corpurilor și are valoarea $g \approx 9{,}8$ m/s² (depinde de altitudine și latitudine).

Greutatea etalonului masă de 1 kg în cîmpul gravitațional normal (standard) dat de accelerația gravitațională $g_n = 9{,}80665$ m/s² este:

$$G = mg = 1 \text{ kg} \cdot 9{,}80665 \text{ m/s}^2 = 9{,}80665 \text{ N} \approx 9{,}8 \text{ N}.$$

Accelerația gravitațională la nivelul mării și la paralela de 45° este $g_0 = 9{,}80616$ m/s².

4. Ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$ nu ne spune nimic despre *natura* forței: ea poate fi de natură gravitațională, electrică sau în particular forță elastică, forță de frecare etc. În ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$ forța apare sub formă abstractă ca un model *mecanic* al oricărei interacțiuni a corpurilor, independent de natura fizică a acestei interacțiuni. În modul acesta, relația $\vec{F} = m\vec{a}$, pe lîngă caracterul de lege a naturii, poartă și caracterul de *definiție dinamică a forței*. De aceea pentru determinarea mișcării unui sistem: oscilator elastic, sistem solar, atom etc. trebuie cunoscută și *legea forței*, de exemplu legea lui Hooke, legea atracției gravitaționale (NEWTON), legea interacțiunii electrice (COULOMB) etc.

2.3.2. **Impulsul.** Să scriem desfășurat relația (2.7):

$$\vec{F}_m = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(m\vec{v})_2 - (m\vec{v})_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.11}$$

Se vede că aici apare produsul $m\vec{v}$ dintre masă și viteză. Acest produs reprezintă o nouă mărime fizică importantă numită impuls.

Impulsul punctului material este produsul dintre masa și viteza sa, $\vec{p} = m\vec{v}$.

Impulsul este o mărime *vectorială* care are aceeași direcție și același sens cu vectorul viteză (fig. 2.4).

Revenind la ecuația (2.11), putem scrie:

$$\vec{F}_m = m\vec{a}_m = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{2.12}$$

Forța este egală cu variația impulsului raportată la intervalul de timp, adică variația impulsului care *revine* unității de timp.

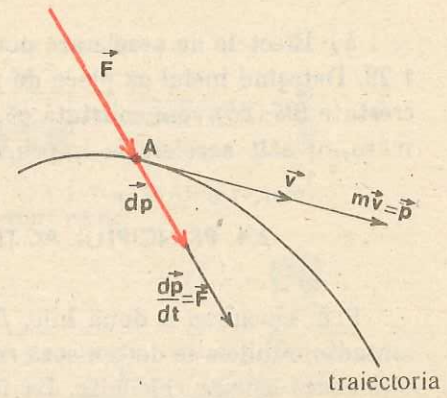


Fig. 2.4. Impulsul unui punct material, $\vec{p} = m\vec{v}$, are direcția și sensul vitezei $\vec{v}$. Variația impulsului are direcția și sensul forței aplicate.

Aceasta este o altă formulare (cea mai generală) a principiului II al dinamicii (de altfel așa l-a formulat chiar Newton).

Unitatea de măsură pentru impuls rezultă din definiția sa:

$$[p] = [m][v] = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ s} = \text{N} \cdot \text{s}, \tag{2.13}$$

Această unitate este deci egală cu impulsul unui punct material care are masa de 1 kg și se mișcă cu viteza de 1 m/s.

EXPERIMENT

Forțele produc două feluri de efecte: efecte de *deformare* a corpurilor (numite efecte statice) și efecte de *accelerare* a corpurilor (numite efecte dinamice).

a) Efectele de deformare sînt folosite pentru a măsura forțele. Există corpuri, numite *elastice*, la care deformațiile (nu prea mari) dispar odată cu îndepărtarea forțelor care le-au produs, de exemplu tot felul de *resorturi*.

Dinamometrele sînt resorturi elastice prevăzute cu o riglă pentru măsurarea alungirilor, deci a forțelor aplicate, rigla fiind gradată direct în unități de forță (fig. 2.5). Cu ajutorul dinamometrelor putem verifica legea de compunere *vectorială* a forțelor.

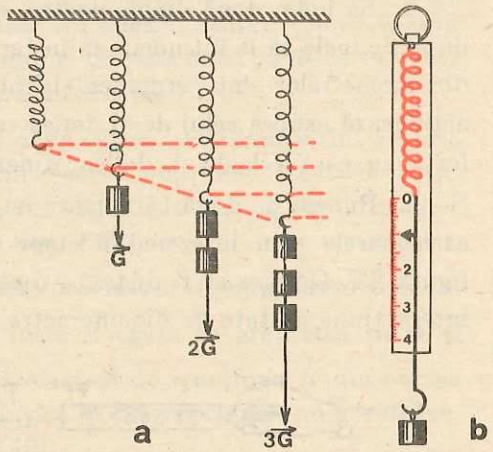


Fig. 2.5. (*a*) Alungirea unui resort elastic este proporțională cu forța de întindere. (*b*) Schema unui dinamometru.

b) Efectele de accelerare pot fi puse în evidenţă cu montajul din figura 1.29. Detaşînd inelul cu placa de prindere (*22*, *32*) şi folosind diferite greutăţi crestate (*25*, *26*) vom constata că, cu cît forţa de greutate a acestora este mai mare, cu atît acceleraţia imprimată căruciorului este mai mare.

2.4. PRINCIPIUL ACŢIUNILOR RECIPROCE (lex tertia)

Prin ciocnirea a două bile, *fiecare* îşi schimbă viteza, fiindcă în timpul contactului bilele se deformează *reciproc* şi se nasc forţe elastice cu care o bilă acţionează asupra celeilalte. La fel, la ciocnirea a două vagoane, resorturile tampoanelor de la *fiecare* vagon se comprimă, *fiecare* vagon acţionînd asupra celuilalt cu o forţă.

În procesul interacţiunii a două corpuri, *fiecare* corp exercită o forţă asupra celuilalt, adică apar totdeauna *simultan două forţe*, numite *acţiune* şi *reacţiune*. Care din aceste două forţe se numeşte acţiune şi care reacţiune, depinde de care corp se consideră primul şi care al doilea. Primul corp acţionează asupra celui de-al doilea cu o forţă care se va numi acţiune, iar corpul al doilea acţionează (vom spune acum, reacţionează) asupra primului cu o forţă numită reacţiune. Cele două forţe acţionează *simultan* (în concepţia clasică newtoniană a acţiunii instantanee la distanţă).

Oriunde constatăm o forţă acţionînd asupra unui corp, eă este expresia acţiunii unui alt corp din mediul înconjurător, este o latură a *interacţiunii* dintre cele două corpuri. O forţă unică, izolată, este o imposibilitate.

EXPERIMENTE

1. Să luăm două dinamometre, să le cuplăm prin cîrligele lor şi apucîndu-le de inele să le întindem ca în figura 2.6. Oricît le-am întinde, indicaţiile dinamometrelor sînt permanent identice, forţa cu care primul dinamometru acţionează asupra celui de-al doilea este egală ca mărime şi opusă ca sens cu forţa cu care cel de-al doilea dinamometru acţionează asupra primului.

2. Punem pe două cărucioare un magnet şi o bucată de fier şi prindem cărucioarele prin intermediul unor dinamometre de obiecte fixe, ca în figura 2.7. Oricare ar fi distanţa dintre magnet şi bucata de fier, forţele de interacţiune arătate de dinamometre sînt egale în modul şi de sensuri opuse.

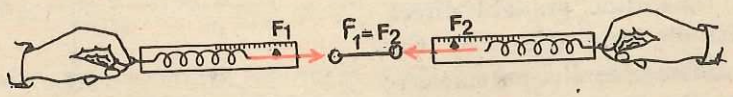


Fig. 2.6. Fiecare dinamometru acţionează asupra celuilalt cu o forţă egală în modul şi de sens opus.

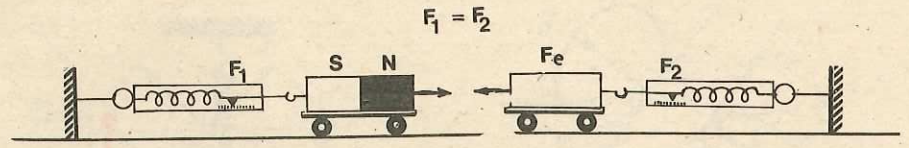


Fig. 2.7. Interacţiunea dintre un magnet şi o bucată de fier: se atrag reciproc, cu forţe egale în modul şi de sensuri opuse.

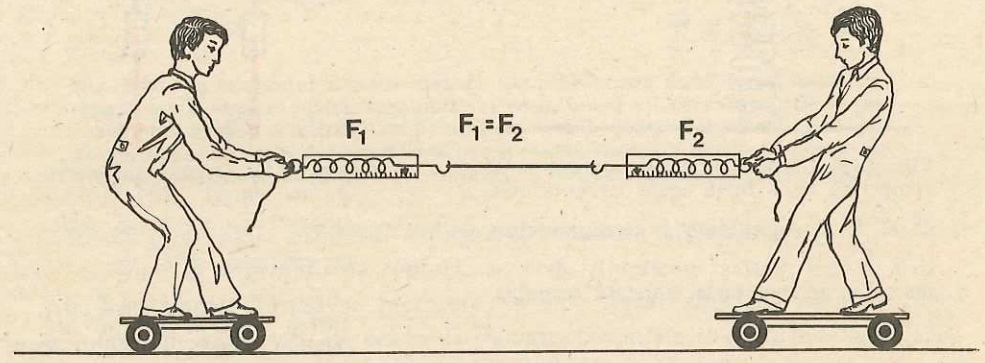


Fig. 2.8. Oricare din elevi ar trage de sfoară, ambele cărucioare se apropie şi se întîlnesc mereu în acelaşi loc.

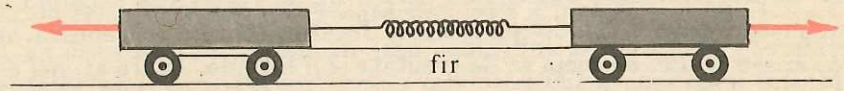


Fig. 2.9. Două cărucioare identice, aşezate pe un plan orizontal şi cuplate printr-un resort comprimat sînt supuse reciproc unor forţe egale în modul şi de sensuri opuse.

3. Pe două cărucioare stau doi elevi şi trag de o sfoară (fig. 2.8). Indiferent care dintre ei trage activ „scurtînd" sfoara, ambele cărucioare se vor întîlni de fiecare dată în acelaşi loc. Fiecare elev acţionează asupra celuilalt, prin intermediul sforii, cu o forţă egală în modul şi de sens opus (ceea ce se poate constata cu ajutorul unor dinamometre intercalate).

4. Într-o altă variantă a experienţei două cărucioare *identice* sînt aşezate pe o sticlă orizontală şi cuplate printr-un resort comprimat, legat cu un fir. Dacă ardem firul, cele două cărucioare se vor depărta la fel, sub acţiunea unor forţe egale în modul şi de sensuri opuse (fig. 2.9).

5. Dacă punem un corp pe o platformă orizontală (uşoară) aşezată pe un resort, corpul apasă pe *platformă* cu o forţă $\vec{F}$ egală cu greutatea sa $\vec{G}$ şi comprimă resortul. Apare atunci o forţă elastică de reacţiune $\vec{N}$ din partea resortului, aplicată *corpului*, egală în modul şi de sens opus cu greutatea, astfel încît corpul va fi în repaus (fig. 2.10).

Acelaşi lucru se întîmplă cu orice corp aşezat pe orice suprafaţă orizontală, numai că la materialele dure deformarea nu se observă cu ochiul liber.

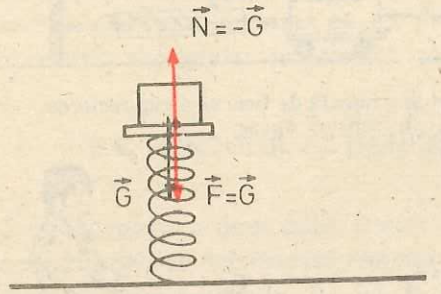


Fig. 2.10. Corpul aşezat pe un resort îl comprimă cu o forţă egală cu greutatea sa $\vec{G}$. Se naşte automat o reacţiune elastică $\vec{N}$ din partea resortului, egală în modul şi de sens opus, aplicată corpului.

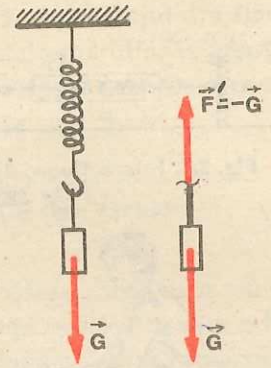


Fig. 2.11. Corpul suspendat de un resort (fir) întinde resortul cu o forţă egală cu greutatea sa $\vec{G}$. Se naşte atunci o forţă elastică $\vec{F}'$ din partea resortului, aplicată corpului, egală în modul şi de sens opus tracţiunii (greutăţii) $\vec{G}$.

6. În altă variantă, suspendăm corpul de un resort (de exemplu de un dinamometru) (fig. 2.11). În punctul de legătură corpul acţionează asupra *resortului* sau *firului* cu forţa sa de greutate şi îl întinde. Apare atunci o forţă elastică din partea resortului sau a firului, aplicată corpului, egală în modul şi de sens opus cu greutatea corpului (acesta fiind în repaus, în echilibru).

Nenumărate experienţe şi măsurători dovedesc valabilitatea *principiului acţiunilor reciproce* sau *principiului acţiunii şi reacţiunii:*

fiecărei acţiuni i se opune totdeauna o reacţiune egală în modul şi de sens opus, sau altfel, *acţiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale ca mărime şi dirijate în sensuri opuse.*

Cele două forţe, acţiunea şi reacţiunea, sînt aplicate unor corpuri *diferite* şi acţionează pe *aceeaşi linie*, linia care uneşte cele două corpuri. Dacă cele două forţe ar acţiona asupra aceluiaşi corp, acesta n-ar putea fi niciodată accelerat, deoarece cele două forţe ar da totdeauna rezultantă nulă.

Principiul acţiunii şi reacţiunii poate fi exprimat şi astfel:

dacă un corp acţionează asupra altui corp cu o forţă, numită acţiune, cel de-al doilea corp acţionează asupra primului cu o forţă egală în modul şi opusă ca sens, numită reacţiune.

2.4.1. **Exemple şi aplicaţii ale principiului III. 1.** La *contactul* oricăror două corpuri apar totdeauna *două* forţe, egale în modul şi de sensuri opuse, acţiunea unui corp asupra celuilalt şi reacţiunea celui de-al doilea asupra primului (fig. 2.12).

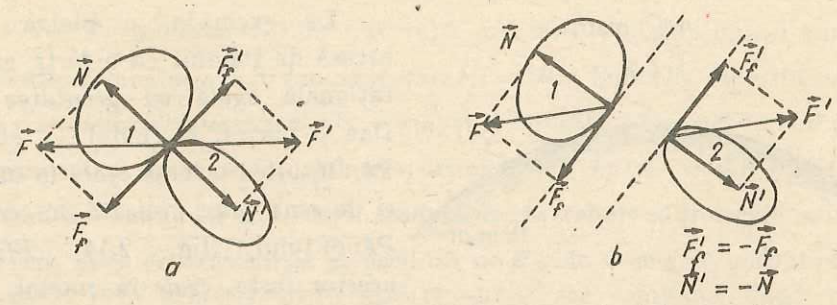


Fig. 2.12. La contactul a două corpuri apar totdeauna două forţe, egale în modul şi de sensuri opuse, acţiunea şi reacţiunea, cu care corpurile acţionează unul asupra celuilalt. Componentele normale (perpendiculare) pe planul de contact se datoresc deformării reciproce a corpurilor, iar cele tangenţiale (de frecare), conţinute în planul de contact, se datoresc frecării dintre corpuri.

Aceste forţe sînt *rezultatul deformării reciproce a corpurilor şi a frecării dintre corpuri la suprafaţa de contact.*

Anume, prin deformarea reciprocă se nasc *forţe (elastice) normale* (perpendiculare) pe suprafaţa de contact. Desigur corpurile se deformează diferit, deşi forţele normale sînt *egale în modul.* Prin frecare, între corpuri se nasc *forţe tangenţiale*, de frecare, conţinute în planul de contact. Avem: $\vec{N}' = -\vec{N}$, $\vec{F}_f' = -\vec{F}_f$. (Uneori forţele de frecare sînt mici şi pot fi neglijate.)

2. În orice *secţiune* a unui fir (sau cablu) întins de o forţă (de exemplu de greutatea unui corp atîrnat) sau în orice *secţiune* a unei bare, întinse sau comprimate, acţionează *două* forţe egale în modul şi de sensuri opuse, acţiunea şi reacţiunea, cu care o parte a firului (barei) acţionează asupra celeilalte părţi (fig. 2.13). Oricare din aceste două forţe se numeşte *tensiune* elastică din fir (sau bară). Tensiunea în orice punct al firului se poate măsura cu un dinamometru inserat pe fir în punctul respectiv. Dacă greutatea proprie a firului este neglijabilă, tensiunea din fir în orice secţiune a sa va fi aceeaşi (egală cu greutatea corpului atîrnat, de exemplu).

3. Principiul acţiunii şi reacţiunii se aplică nu numai în cazul unui contact nemijlocit între două corpuri, ci şi în cazul cînd corpurile interacţionează prin cîmpul gravitaţional sau electrostatic.

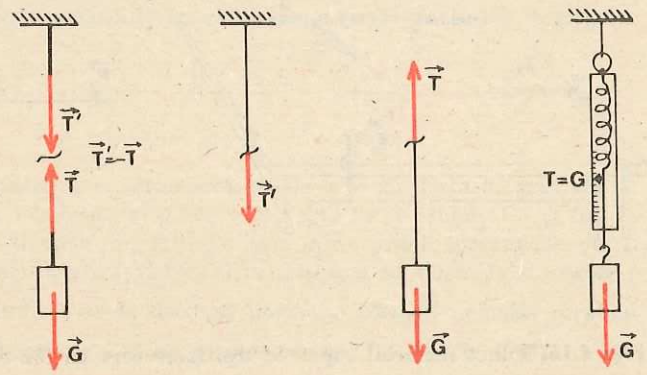


Fig. 2.13. Tensiunea (elastică) dintr-un fir întins poate fi măsurată cu un dinamometru inserat în fir în secţiunea dorită.

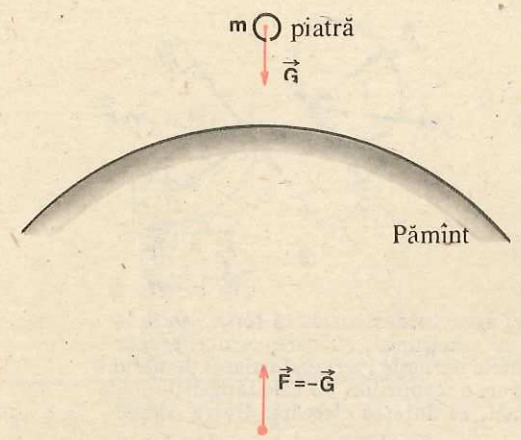


Fig. 2.14. Piatra este atrasă de Pămînt cu o forță exact egală în modul și de sens opus cu forța cu care Pămîntul este atras de piatră. Efectele acestor forțe sînt însă cu totul diferite din cauza maselor total diferite.

De exemplu, o piatră este atrasă de Pămînt cu o forță gravitațională egală cu greutatea sa. Dar și piatra, la rîndul ei, atrage Pămîntul cu o forță *egală* în modul și de sens *opus*, aplicată în centrul Pămîntului (fig. 2.14). *Efectele* acestor forțe, *egale* în modul, sînt însă cu totul diferite, din cauza deosebirii colosale în privința masei celor două corpuri.

La fel, forțele de atracție gravitațională reciprocă între Lună și Pămînt, între oricare satelit și Pămînt, între Pămînt și Soare etc. sînt egale în modul și opuse ca sens.

În cazul interacțiunii electrostatice, de asemenea, forța de atracție sau de respingere, exercitată de un purtător de sarcină asupra altuia, este totdeauna egală în modul și opusă ca sens forței exercitate de cel de-al doilea purtător de sarcină asupra primului. Cele două forțe acționează pe *aceeași* dreaptă, dreapta care unește cei doi purtători.

2.5. PRINCIPIUL SUPRAPUNERII FORȚELOR

Fie un punct material asupra căruia acționează trei forțe care își fac echilibru: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ (fig. 2.15). Aceasta înseamnă că suma a două forțe, de exemplu, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ este egală în modul și de sens opus cu cea de-a treia forță: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$.

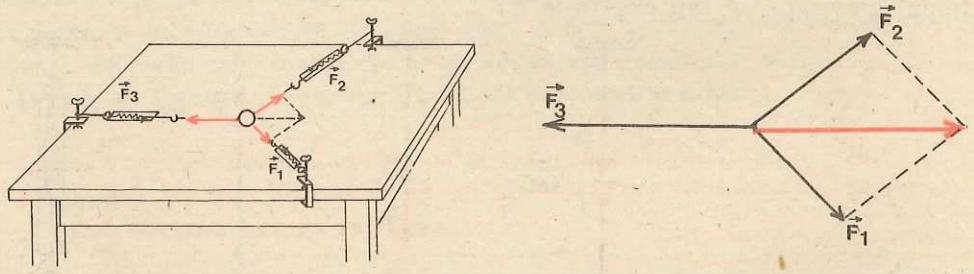


Fig. 2.15. Punct material supus la trei forțe care își fac echilibru: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.

Forța $\vec{F}_1$, *aplicată singură* punctului material, i-ar imprima o anumită accelerație $\vec{a}_1$, conform legii fundamentale $\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$. Forța $\vec{F}_2$, aplicată singură ar da o anumită accelerație $\vec{a}_2$, $\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$ și la fel forța $\vec{F}_3 = m\vec{a}_3$ i-ar imprima accelerația $\vec{a}_3$. Accelerațiile sînt proporționale cu forțele. Dacă forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ acționează *simultan*, accelerația produsă de ele trebuie să fie egală în modul și de sens opus cu accelerația $\vec{a}_3$ produsă de $\vec{F}_3$, de vreme ce corpul rămîne în repaus. Prin urmare, accelerația rezultantă se compune, după regula paralelogramului, din accelerațiile pe care le-ar produce *separat* fiecare forță componentă dacă ar acționa singură. De asemenea, accelerația imprimată de o forță nu depinde de viteza momentană a corpului (în mecanica *relativistă* accelerația nu este riguros coliniară cu forța, și depinde și de viteza corpului).

Astfel de considerații conduc la formularea *principiului independenței acțiunii forțelor* sau *principiului suprapunerii forțelor:*

dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație în mod independent de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale.

1. NEWTON a formulat acest principiu separat de celelalte trei principii sub forma următoare:

un corp, sub acțiunea simultană a două forțe, descrie diagonala unui paralelogram avînd ca laturi aceste forțe, în același timp în care ar descrie separat fiecare latură sub acțiunea forței corespunzătoare.

Acest principiu arată deci că forțele și accelerațiile produse de ele sînt mărimi *vectoriale* care se compun după regula paralelogramului, și ne permite să rezolvăm probleme cînd asupra corpului acționează simultan mai multe forțe.

În adevăr, cazul unei *singure* forțe se prezintă rar, și anume, atunci cînd interacțiunea corpului cu mediul exterior este dată *în principal* de interacțiunea sa cu un *singur* corp, interacțiunile cu celelalte corpuri putînd fi neglijate.

EXEMPLU

Dacă aruncăm o piatră, asupra ei acționează, pe de o parte, forța de greutate $\vec{G}$, datorită interacțiunii cu Pămîntul, și pe de altă parte forța arhimedică și forțele de frecare cu aerul, care se opun mișcării, dar care într-o primă aproximație pot fi neglijate. Care este atunci accelerația pietrei în mișcarea sa liberă în atmosferă?

Conform legii fundamentale, n-avem decît să împărțim forța $\vec{G}$ la masa corpului și obținem vectorul accelerației $\vec{g} = \vec{G}/m$, orientat vertical în jos (fig. 2.16).

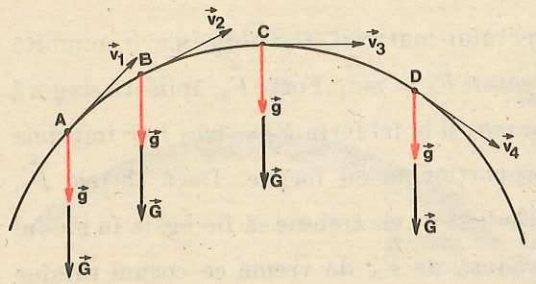


Fig. 2.16. În mișcarea liberă în vid a unui corp accelerația sa $\vec{g}$ este tot timpul aceeași, orientată vertical în jos ca și forța de greutate $\vec{G}$.

În practică, asupra corpului acționează aproape totdeauna simultan mai multe forțe, printre care este forța de greutate, deoarece nici un corp de pe Pămînt nu poate fi sustras interacțiunii sale gravitaționale cu Pămîntul. În afară de aceasta, corpul este în contact cu mediul, adică în contact cu alte corpuri (așezat pe un plan, sprijinit de un perete, mișcat într-un fluid). La contactul cu un solid apar, după cum am văzut, două forțe: reacțiunea normală și forța de frecare. În cazul mișcării într-un fluid (la contactul solid-fluid) apar de asemenea două forțe: forța arhimedică (verticală) și forța de rezistență (opusă vitezei). În sfîrșit, asupra corpului se pot exercita forțe de tracțiune sau de împingere prin fire sau tije.

După ce am ales corpul pe care vrem să-l studiem și l-am izolat mintal, reprezentăm *toate* forțele care acționează *asupra lui* și care sînt evident rezultatul interacțiunii sale cu mediul exterior.

În cazul unui corp aproximat printr-un *punct material*, toate forțele se aplică în acest punct, deci sînt forțe *concurente* și se compun după *regula paralelogramului sau a poligonului.*

În cazul mișcării de *translație* a unui corp forțele pot fi deplasate paralel și compuse ca la punctul material.

De altfel, în rezolvarea problemelor practice nu este de obicei necesar să compunem forțele, ci mai degrabă să le *descompunem.*

În cazul particular cînd toate forțele acționează *pe direcția mișcării*, alegem dreapta respectivă drept axă Ox (cu sensul pozitiv ales în sensul vitezei) și considerăm forțele pozitive dacă acționează în sensul pozitiv ales și negative dacă acționează în sensul negativ. Suma algebrică a acestor forțe ne dă forța rezultantă, pozitivă dacă acționează în sensul pozitiv și negativă în caz contrar:

$$\Sigma F = ma.$$

(Litera sigma majusculă, Σ, înseamnă *sumă.*)

Cînd toate forțele acționează *în planul mișcării*, alegem în acel plan două direcții convenabile (de obicei perpendiculare între ele) și descompunem toate forțele, viteza și accelerația, după cele două direcții alese. De cele mai multe ori alegem axele *perpendiculare* între ele, Ox, Oy, atunci paralelogramul vectorilor devine un *dreptunghi* și componentele vectorilor se obțin prin *proiecție ortogonală.* Mișcarea plană se descompune în două mișcări rectilinii după cele

două axe și deci pentru fiecare axă separat scriem formulele din cazul mișcării rectilinii.

Prin urmare, ecuația fundamentală $\vec{R} = \Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ scrisă pentru un punct material dat se aplică totdeauna *proiectînd-o pe axele de coordonate* ortogonale între ele (două axe în cazul mișcării plane și trei axe în cazul mișcării în spațiu), adică *pe componente.*

Suma componentelor pe o axă Ox a tuturor forțelor aplicate unui corp (punct material sau corp în mișcare de translație) este egală cu masa corpului înmulțită cu componenta accelerației pe aceeași axă.

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \ldots = ma_x \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots = ma_y \\ (F_{1z} + F_{2z} + \ldots = ma_z) \end{cases} \qquad (2.14)$$

2.6. PRINCIPIUL RELATIVITĂȚII ÎN MECANICA NEWTONIANĂ

Încă pentru Galilei era clar că prin experiențe mecanice, efectuate în interiorul unui sistem (laborator), este imposibil de determinat mișcarea rectilinie uniformă a acestuia față de stele sau față de Soare sau chiar față de Pămînt. Iată ce scria Galilei în 1632 despre fenomenele mecanice dintr-o cabină închisă a unei corăbii:

„Dacă mișcarea corăbiei este rectilinie uniformă, nu veți observa nici cea mai mică schimbare în toate fenomenele și nu veți putea hotărî, ținînd seama de vreunul din aceste fenomene, dacă corabia se mișcă sau stă pe loc. Sărind, veți parcurge pe podea aceleași distanțe ca și atunci cînd corabia se află în repaus, adică, datorită mișcării rapide a corăbiei, nu veți face sărituri mai mari spre pupă, decît spre prora corăbiei, deși, în timpul cît vă aflați în aer, podeaua de sub voi fuge în partea opusă săriturii sau, aruncînd un obiect oarecare unui prieten, nu va trebui să-l aruncați cu o forță mai mare, dacă prietenul se va afla lîngă prora corăbiei, iar dumneavoastră lîngă pupă, decît dacă veți ocupa poziții inverse; picăturile dintr-o cană cu apă atîrnată în tavan vor cădea vertical pe podea și nici una din ele nu va cădea în direcția pupei, deși în timpul cît picătura se află în aer, corabia înaintează. Muștele își vor continua zborul, indiferent în ce direcție, și niciodată nu se va întîmpla ca ele să se strîngă spre partea mai apropiată de pupă, ca și cum ar obosi să se tot țină după mersul rapid al corăbiei."

Acesta este de fapt conținutul principiului relativității mecanice.

Principiul relativității al lui Galilei se poate formula astfel: nici o experiență mecanică efectuată în *interiorul* unui sistem de referință inerțial nu ne permite să determinăm mișcarea sa rectilinie uniformă față de alte sisteme de referință inerțiale (față de stele și nebuloase). Altfel spus:

legile mecanicii sînt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale.

De aici rezultă că din punct de vedere mecanic toate sistemele de referință inerțiale, deci cele care se mișcă rectiliniu uniform unele față de altele și față de stele, sînt *absolut echivalente*, nici un sistem de referință inerțial nu poate fi considerat fix sau absolut, toate sînt egal justificate.

În adevăr, primul principiu al mecanicii (principiul inerției) este valabil în oricare sistem de referință inerțial, deoarece este chiar folosit pentru a defini aceste sisteme. Deoarece măsurarea *forței* poate fi redusă la măsurarea unor lungimi și durate (măsurarea simultană a capetelor alungirii unui resort), iar lungimile și duratele sînt invariante

în mecanica clasică newtoniană, rezultă că și forța este aceeași în diferite sisteme de referință inerțiale (este vorba de forțe dependente numai de distanțe și viteze relative), deci și principiul III al acțiunii și reacțiunii este valabil în aceste sisteme. În sfîrșit, am arătat cu ajutorul transformărilor lui Galilei că și *accelerația are caracter invariant* față de sistemele de referință inerțiale, de aceea și principiul fundamental (II) este valabil în orice sistem de referință inerțial (masa este o constantă în mecanica clasică). Prin urmare:

principiile mecanicii newtoniene fiind invariante la transformările Galilei, rezultă că toate legile mecanicii newtoniene (care sînt consecințe ale principiilor) *sînt invariante la transformările lui Galilei adică sînt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale.*

După cum am spus, un fizician închis într-un laborator nu poate determina cu ajutorul experiențelor mecanice locale mișcarea rectilinie uniformă a laboratorului său față de sistemele de referință inerțiale, dar poate determina o mișcare curbilinie accelerată a laboratorului. Astfel, prin experiențe mecanice efectuate chiar pe Pămînt se poate dovedi mișcarea de rotație diurnă a Pămîntului: amintim, de exemplu, celebra experiență a lui Foucault din 1851 cu rotația planului de oscilație al unui pendul.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un cărucior cu ciment, cu masa $m = 100$ kg, este ridicat cu ajutorul unei macarale cu o forță $F = 1{,}20$ kN. Care este accelerația căruciorului?

Rezolvare. Asupra căruciorului acționează *două* forțe: greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$, în jos, și forța de tracțiune $\vec{F}$ exercitată de macara prin cablu, în sus (neglijăm forța arhimedică și forțele de frecare) (fig. 2.17). Alegînd axa Ox vertical în sus, în sensul mișcării, avem

$$F - mg = ma,\ a = \frac{F - mg}{m} = 2{,}2\ \text{m/s}^2.$$

Observație. Forța F poate fi exercitată prin intermediul unui fir trecut peste scripete. Vom presupune totdeauna în problemele de mai jos că firul este de masă neglijabilă, subțire, flexibil și inextensibil. De asemenea, vom presupune totdeauna că scripetele este *ideal*, adică de masă neglijabilă și cu frecări neglijabile în lagărele sale (cu rulmenți).

Un scripete ideal schimbă convenabil direcția forței: de o parte și de alta a scripetelui forța de întindere a *firului* va fi aceeași. Se poate verifica aceasta cu ajutorul unor dinamometre prinse de cele două capete ale firului (fig. 2.18).

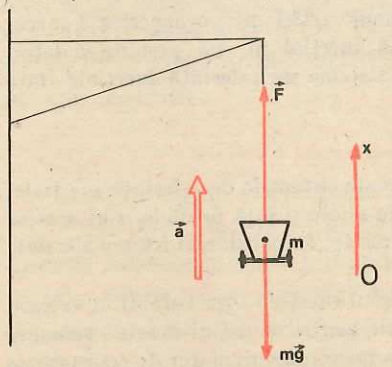


Fig. 2.17. La problema rezolvată 1.

Prin *tensiunea din fir* se înțelege forța care întinde firul și care se poate măsura tăind firul și intercalînd un dinamometru (fig. 2.19). Tensiunea din fir este o forță elastică care se datorește deformării (alungirii) elastice a firului. Astfel de tensiuni în cabluri sau bare din cadrul diferitelor construcții (poduri, acoperișuri etc.) trebuie neapărat cunoscute pentru a alege cablul sau bara de grosime corespunzătoare ca să nu se rupă.

2. Peste un scripete ideal este trecut un fir de capetele căruia sînt atîrnate două corpuri de

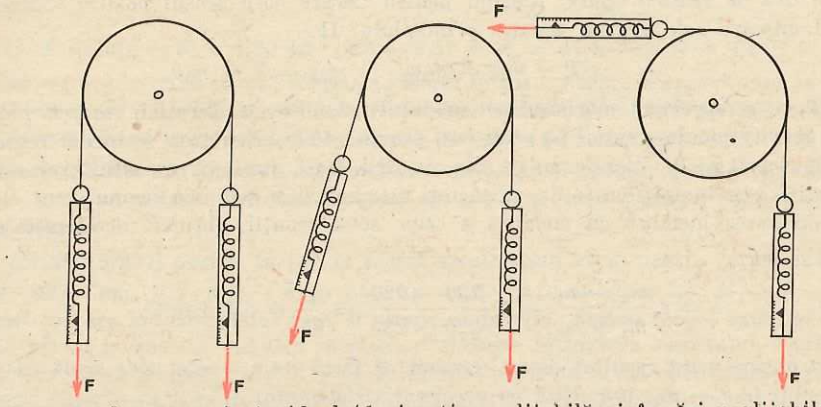


Fig. 2.18. Un scripete ideal (de inerție neglijabilă și frecări neglijabile în lagăre) schimbă convenabil direcția forței: de o parte și de alta a scripetelui forța de întindere a firului (tensiunea din fir) este aceeași.

mase $m_1 = 220$ g și $m_2 = 230$ g. Să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea din fir (fig. 2.20).

Rezolvare. Un scripete ideal schimbă convenabil *direcția* forței, deci de o parte și de alta a scripetelui *tensiunea din fir este aceeași.*

Asupra fiecărui corp acționează forța de tensiune din fir T în sus și forța de greutate în jos. Diferența acestor două forțe produce accelerația corpului. Cele două corpuri, fiind legate prin fir, se mișcă solidar, m_2 în jos, m_1 în sus, cu accelerații egale în

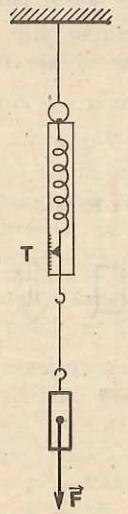


Fig. 2.19. Tensiunea dintr-un fir este forța care întinde firul și se poate măsura cu un dinamometru inserat pe fir.

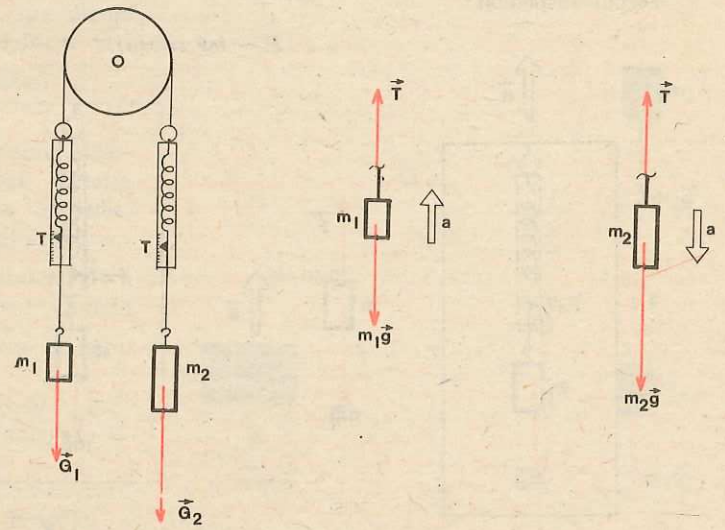


Fig. 2.20. Un scripete peste care este trecut un fir cu două corpuri atîrnate la capete (la exemplul rezolvat 2).

modul dar de sensuri opuse. Alegînd pentru fiecare corp sensul pozitiv al axei în sensul mișcării *sale*, scriem ecuația principiului II:

$$T - m_1 g = m_1 a, \qquad m_2 g - T = m_2 a.$$

Aici T, a, g reprezintă mărimea sau modulul tensiunii, accelerației, respectiv accelerației gravitaționale, semnul (+) sau (−) provine de la orientarea vectorilor respectivi față de sensul *pozitiv ales de noi* pe axa mișcării. Dacă am inversa sensul axei, ecuația respectivă s-ar înmulți cu (−1), adică toți membrii și-ar schimba semnul.
Prin adunarea membru cu membru a celor două ecuații, obținem accelerația sistemului:

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = g\,\frac{230 - 220}{220 + 230} = \frac{g}{45} = 0{,}218 \text{ m/s}^2.$$

Putem obține acest rezultat direct, scriind că forța $(m_2 g - m_1 g)$ este egală cu masa sistemului $(m_1 + m_2)$ înmulțită cu accelerația sistemului a.
Introducînd expresia accelerației a în prima sau a doua ecuație de mai sus, găsim tensiunea din fir:

$$T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 2{,}20 \text{ N}.$$

3. Într-un lift este suspendat de tavan un dinamometru de care atîrnă un corp cu masa $m = 1{,}00$ kg. Ce forță indică dinamometrul dacă liftul se mișcă cu accelerația $a = 2{,}0$ m/s² îndreptată: *a)* în sus, *b)* în jos (fig. 2.21).
Rezolvare. Dacă liftul este în repaus, resortul dinamometrului este întins cu o forță egală cu greutatea corpului atîrnat, acesta fiind în repaus:

$$F = G = mg = 1{,}00 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 9{,}8 \text{ N}.$$

a) În primul caz, alegînd sensul pozitiv în sus, în sensul accelerației, avem pentru corpul suspendat:

$$F - mg = ma,$$

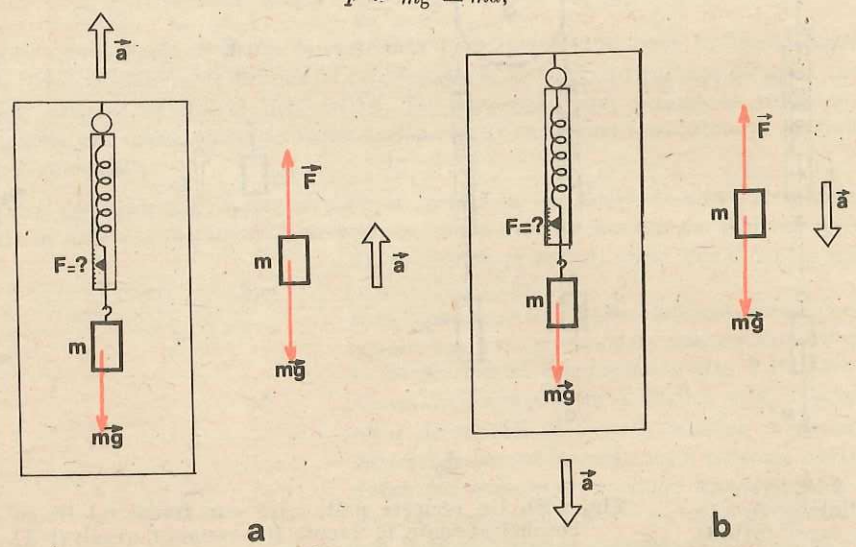


Fig. 2.21. Dinamometrul suspendat de tavanul unui lift accelerat și avînd un corp suspendat la capăt dă indicații diferite de greutatea corpului. (Problema rezolvată 3.).

de unde

$$F = m(g + a) = 1{,}00 \text{ kg} \cdot (9{,}8 + 2{,}0) \text{ m/s}^2 = 11{,}8 \text{ N} > G = 9{,}8 \text{ N}.$$

Acest caz are loc cînd liftul pornește accelerat în sus. Atunci corpul rămîne la început puțin în urmă datorită inerției sale, resortul se întinde, se naște o forță elastică *suplimentară* necesară pentru a *accelera* corpul. Exact la fel se întîmplă cînd liftul coboară și începe să frîneze (aceeași accelerație ca mai sus). Corpul în virtutea inerției caută să-și mențină viteza, întinde resortul, se naște o forță elastică *suplimentară* care îl *frînează*.

b) Alegînd sensul pozitiv în jos, în sensul accelerației, avem pentru corpul suspendat:
$mg - F = ma$, $F = m(g - a) = 1{,}00 \text{ kg} \cdot (9{,}8 - 2{,}0) \text{ m/s}^2 = 7{,}8 \text{ N} < G = 9{,}8 \text{ N}$
Acest caz are loc cînd liftul urcă și începe să frîneze. Atunci corpul caută să-și mențină viteza în sus, în virtutea inerției, și slăbește întinderea resortului. La fel, cînd liftul pornește accelerat în jos, corpul rămîne inițial în urmă și întinderea resortului scade. Dacă liftul cade liber în jos cu accelerația $a = g$, dinamometrul va indica forța *zero* (starea de „imponderabilitate": oricare corp din cabina liftului cade liber cu aceeași accelerație de cădere liberă, ca și liftul). Dacă liftul ar fi tras în jos cu o accelerație $a > g$, resortul ar fi comprimat.

Calculați ce forță de apăsare simte un om de masă $m = 70$ kg din partea podelei liftului în cazurile de mai sus.

O b s e r v a ț i e. Un corp așezat pe un *plan orizontal* neted, fără frecări, exercită o forță de apăsare asupra planului, deformîndu-l. Apare atunci o forță de reacțiune $\vec{N}$ din partea planului, exercitată asupra corpului (principiul III). Forța $\vec{N}$ este perpendiculară pe planul orizontal și compensează forța verticală de greutate $\vec{G}$, adică $\vec{N} = -\vec{G}$ sau $\vec{N} + \vec{G} = 0$.
Dacă acum asupra corpului acționează forțe pe o aceeași direcție *orizontală*, putem aplica întocmai considerațiile de la cazul unidimensional, deoarece greutatea $\vec{G}$ a corpului va fi permanent anulată de reacțiunea normală $\vec{N}$ a planului orizontal.
Acest caz intervine frecvent în mișcarea vehiculelor pe drumuri rectilinii orizontale.

4. Pe o masă netedă, fără frecări, este așezat un corp de masă $m_1 = 5{,}0$ kg de care este prins un fir orizontal, trecut peste un scripete ideal și avînd la capăt un corp de masă $m_2 = 2{,}0$ kg (fig. 2.22). Să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea din fir.

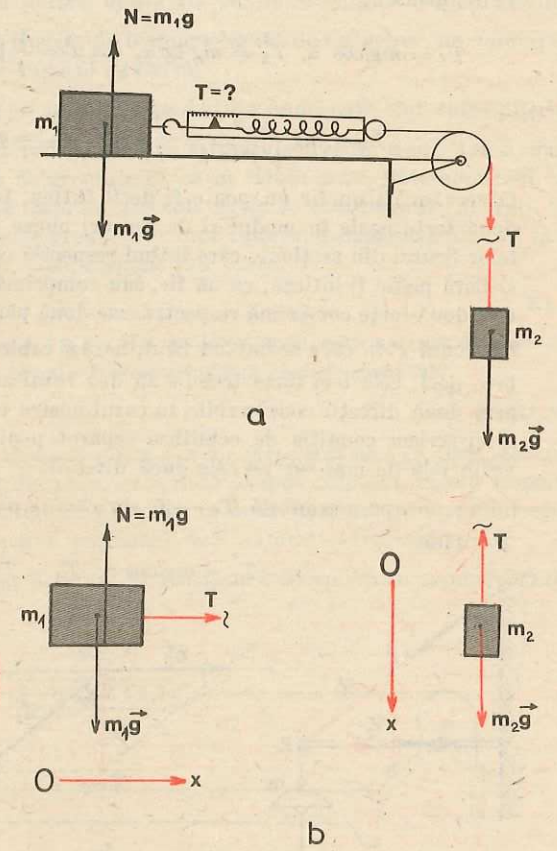


Fig. 2.22. Care este accelerația sistemului și ce forță indică dinamometrul? (Exemplul rezolvat 4.)

Rezolvare. Forța de greutate $G_1 = m_1 g$ a corpului m_1 este anulată de reacțiunea normală N_1 a mesei orizontale. Forțele de frecare sînt neglijabile. Scripetele fiind ideal, tensiunea din fir este aceeași de o parte și de alta a scripetelui.

Alegem axa Ox pentru fiecare corp în direcția și sensul mișcării sale. Atunci ecuația fundamentală se scrie astfel:

$$T = m_1 a, \quad m_2 g - T = m_2 a,$$

de unde

$$a = g \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 2{,}8 \text{ m/s}^2; \quad T = m_1 a = 14 \text{ N}.$$

5. O lampă cu masa $m = 3{,}0$ kg este suspendată ca în figura 2.23. Să se afle tensiunea din fir (de lungime $l = 0{,}50$ m) și din bară (de lungime $b = 0{,}40$ m).

Rezolvare. Putem judeca în două moduri:

a) Descompunem greutatea lămpii $\vec{G}$ după direcția firului și a barei. Pentru aceasta ducem prin originea și prin vîrful vectorului $\vec{G} = m\vec{g}$ (desenat separat) paralele la cele două direcții. Componenta $\vec{G}_1$ întinde firul și este anihilată de tensiunea $\vec{T}_1$ din fir, iar componenta $\vec{G}_2$ comprimă bara și este anihilată de tensiunea $\vec{T}_2$ din bară. Prin urmare:

$$T_1 = mg/\cos\alpha, \quad T_2 = mg \operatorname{tg}\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - b^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = b\frac{1}{\sqrt{l^2 - b^2}}.$$

Deci

$$T_1 = mg\frac{l}{\sqrt{l^2 - b^2}} = 49 \text{ N}, \quad T_2 = mg\frac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}} = 39{,}2 \text{ N}.$$

Observăm că un fir nu poate fi decît întins; în fiecare secțiune a firului acționează două forțe egale în modul și de sensuri opuse, acțiunea și reacțiunea, aplicate capetelor firului din secțiune, care întind respectiv cele două părți ale firului.

O bară poate fi întinsă, ca un fir, sau comprimată. În ultimul caz, în fiecare secțiune, cele două forțe comprimă respectiv cele două părți ale barei.

b) Nodul P în care se îmbină firul, bara și cablul de susținere al lămpii este în echilibru, deci cele trei forțe trebuie să dea rezultantă nulă: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$. Alegem două direcții convenabile, în cazul nostru cea orizontală și cea verticală (fig.2.23, *c*) și scriem condiția de echilibru separat pentru fiecare direcție, proiectînd ecuația vectorială de mai sus pe cele două direcții:

pe orizontală $T_2 - T_1 \sin\alpha = 0$, pe verticală $T_1 \cos\alpha - mg = 0$.

De unde

$$T_1 = mg/\cos\alpha, \quad T_2 = T_1 \sin\alpha = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

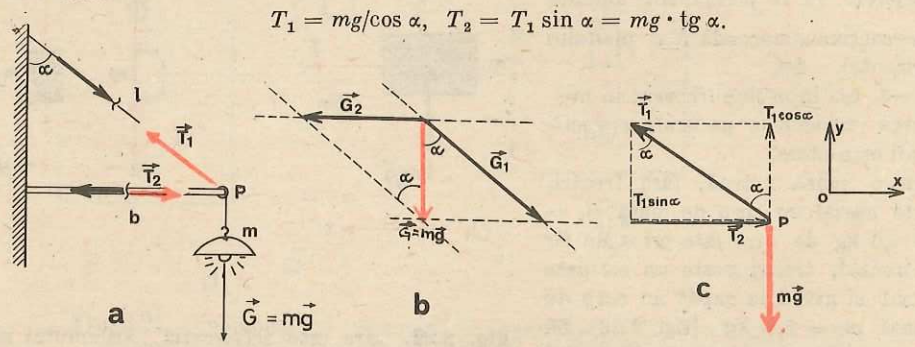


Fig. 2.23. Descompunerea forțelor în problema rezolvată 5.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un muncitor sparge lemne cu toporul. La spargerea unui butuc, toporul a rămas înfipt în butuc. Cum trebuie să lovim de un suport rigid: cu butucul în jos sau cu dosul toporului în jos, pentru a sparge butucul? *(Indicație:* a se compara inerțiile, adică masele toporului și butucului.)

R: cu butucul în sus, dacă masa acestuia e mai mare.

2. Pentru a îndepărta praful, hainele sau covoarele sînt scuturate sau bătute. Explicați aceste două procedee.

R: în virtutea inerției particulele de praf continuă să meargă înainte sau rămîn pe loc.

3. De ce atunci cînd vrem să introducem mînerul de lemn într-un ciocan, topor sau lopată, lovim cu capătul liber al mînerului de un obiect masiv imobil?

R: masa mînerului e mai mică (v. probl. 1).

4. De ce este greu să batem un cui într-un gard prost fixat care se leagănă? Ce trebuie să facem ca să putem totuși bate cuiul?

R: apăsăm de partea opusă cu un obiect masiv (topor, ciocan).

5. Dacă stăm într-o barcă ușoară și tragem de o sfoară legată de un vapor, ne vom apropia de vapor. De ce nu se apropie vaporul de barcă?

R: deși forțele sînt egale în modul, accelerațiile imprimate sînt total diferite.

6. Un dinamometru ușor este legat prin două fire orizontale trecute peste doi scripeți, de două corpuri identice, fiecare de greutate G, ca în figura 2.24. Dinamometrul va indica: 1) zero, fiindcă cele două forțe de greutate egale se echilibrează; 2) forța $2G$, fiindcă fiecare din cele două forțe de greutate întinde resortul dinamometrului; 3) forța de greutate G a unui singur corp. Care răspuns este corect?

R: 3)

7. O sfoară este întinsă orizontal de doi elevi. La mijlocul sforii este un inel de care este agățat un corp cu masa de 1 kg. Poate fi sfoara întinsă *perfect* orizontal?

R: nu.

8. În ce constă eroarea afirmației: „Nu pot mișca din loc (accelera) nici un corp, deoarece la orice acțiune de-a mea, oricît de mare, exercitată asupra corpului, acesta răspunde automat cu o reacțiune egală în modul și opusă ca sens (conform principiului egalității acțiunii și reacțiunii), care îmi anihilează deci automat orice acțiune"?

R: acțiunea și reacțiunea se aplică la corpuri diferite.

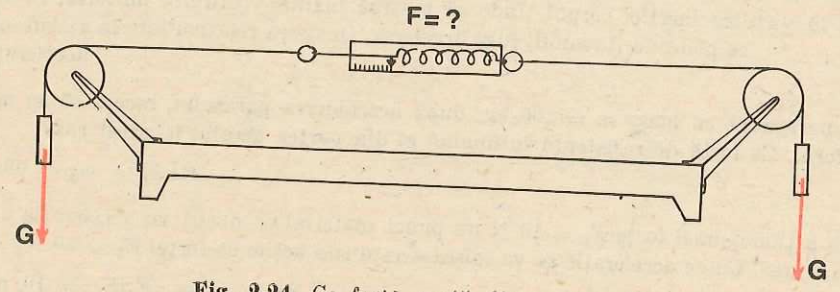


Fig. 2.24. Ce forță arată dinamometrul?

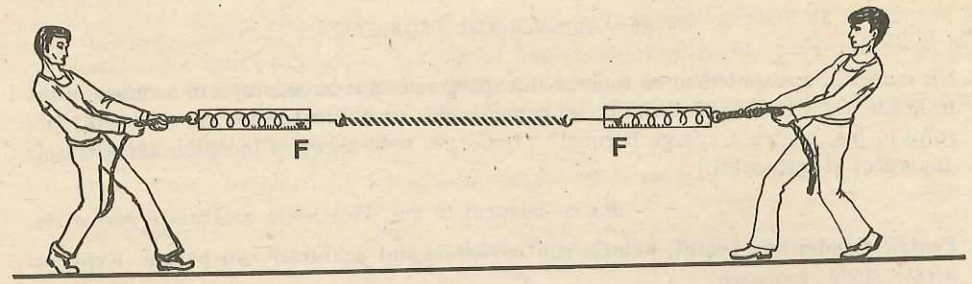


Fig. 2.25. Forţele cu care este trasă sfoara de către elevi sînt permanent egale în modul şi opuse ca sens. Totuşi elevul mai tare învinge şi îl trage pe cel mai slab spre el. De ce?

9. Doi elevi trag de un capăt şi de altul o sfoară, opintindu-se cu picioarele de pămînt (fig. 2.25). Cele două forţe, cu care fiecare acţionează asupra celuilalt prin intermediul sforii, sînt permanent egale în modul şi opuse ca sens, conform principiului egalităţii acţiunii şi reacţiunii (ceea ce se poate verifica punînd pe fiecare elev să tragă de sfoară prin intermediul unui dinamometru prins de un capăt). Totuşi elevul mai puternic va învinge, trăgînd pe cel slab de partea sa. Cum explicaţi aceasta?

R: intervin şi forţele de frecare cu solul.

10. Două vagoane au la tampoanele lor resorturi identice. Vagoanele se ciocnesc. Se consideră mai multe cazuri: unul din vagoane este în repaus; amîndouă se mişcă; unul este încărcat, celălalt gol etc. Să se compare între ele, comprimările celor două resorturi în aceste cazuri.

R: se comprimă egal.

11. Un vapor ciocneşte o barcă, pe care o rupe, fără ca el să aibă vreo stricăciune, sau un camion loveşte un cărucior şi îl strică fără a avea el însuşi vreo stricăciune etc. Nu contrazice aceasta principiul acţiunii şi reacţiunii?

R: nu; efectele forţelor depind de proprietăţile corpurilor.

12. Cum sînt deformate resorturile tampoanelor între diferite vagoane consecutive la un tren *tras* de locomotivă şi la un tren *împins* de locomotivă?

R: alungirile, respectiv comprimările scad de la locomotivă spre capătul liber.

13. *a)* Cum explicaţi răsturnarea corpurilor într-un vehicul care frînează brusc sau virează brusc?

b) Cum explicaţi devierea obiectelor suspendate într-un vagon care accelerează rectiliniu sau virează? În ce sens are loc devierea?

R: în virtutea inerţiei corpul tinde să meargă înainte rectiliniu uniform, în timp ce podeaua (tavanul) fuge accelerat. Devierea relativă este în sensul opus acceleraţiei.

14. Un paraşutist cu masa $m = 100$ kg, după deschiderea paraşutei, începe să se mişte uniform. Ce forţă de rezistenţă întîmpină el din partea aerului în acest caz?

R: $F_r = mg = 980$ N.

15. Sub acţiunea unei forţe $F_1 = 10$ N un punct material se mişcă cu acceleraţia $a_1 = 2{,}0$ m/s². Cu ce acceleraţie se va mişca acesta sub acţiunea forţei $F_2 = 50$ N?

R: $a_2 = a_1 \cdot F_2/F_1 = 10$ m/s².

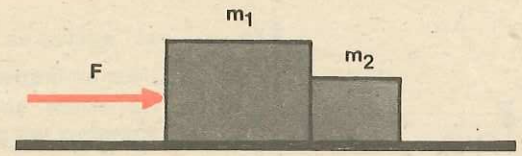


Fig. 2.26. Cu ce forţă împinge corpul m_1 corpul m_2?

16. Un corp cu masa $m_1 = 5{,}0$ kg, sub acţiunea unei forţe, a căpătat acceleraţia $a_1 = 4{,}0$ m/s². Ce acceleraţie va căpăta un corp de masă $m_2 = 20$ kg sub acţiunea aceleiaşi forţe?

R: $a_2 = a_1 \cdot m_1/m_2 = 1{,}0$ m/s².

17. O minge cu masa $m = 0{,}40$ kg după lovire a căpătat o viteză $v = 10$ m/s. Dacă durata lovirii a fost $\Delta t = 4{,}0$ ms, să se afle forţa medie de ciocnire.

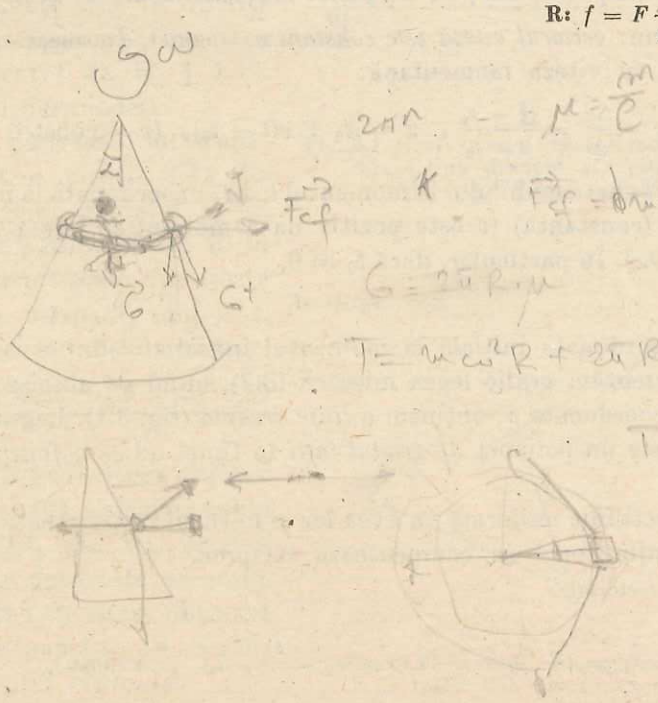
R: $F_m = m\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = 1{,}0$ kN.

18. O sîrmă de oţel rezistă pînă la o forţă de întindere (de rupere) $F_r = 1{,}20$ kN. Cu ce acceleraţie maximă putem ridica, cu ajutorul acestei sîrme, un bloc de beton de masă $m = 100$ kg atîrnat la capătul sîrmei?

R: $a_{max} = F_r/m - g = 2{,}2$ m/s².

19. Două corpuri paralelipipedice de mase $m_1 = 20$ kg şi $m_2 = 5{,}0$ kg sînt aşezate alăturat pe o masă orizontală netedă fără frecări. Corpul de masă m_1 este împins cu o forţă orizontală $F = 100$ N (fig. 2.26). Cu ce forţă corpul m_1 împinge corpul m_2?

R: $f = F\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} = 20$ N.



3

MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL SUB ACȚIUNEA UNOR TIPURI DE FORȚE

Cunoscînd forțele care acționează asupra punctului material, se poate determina mișcarea sa. Vom studia numai cazurile simple, dar frecvent întîlnite în practică.

3.1. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

Conform principiului inerției, un punct material izolat ($\vec{F} = 0$) se mișcă rectiliniu uniform: *vectorul viteză este constant* $\vec{v} = \text{const}$. În acest caz viteza medie coincide cu viteza momentană:

$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}, \quad x = x_0 + v(t - t_0), \quad (v = \text{const.}), \tag{3.1}$$

unde x este coordonata mobilului la momentul t, x_0 = coordonata la momentul t_0 și v — *viteza* (constantă) (v este pozitiv dacă mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei Ox). În particular, dacă $t_0 = 0$,

$$x = x_0 + vt, \tag{3.2}$$

unde x_0 este coordonata inițială la momentul inițial $t = 0$.

Dacă reprezentăm grafic legea mișcării (3.2), luînd pe abscisă timpul t și pe ordonată coordonata x, obținem o *linie dreaptă* (fig. 3.1). Legea mișcării (3.1) sau (3.2) este un polinom de *gradul întîi* în timp, adică o *funcție liniară de timp*.

Mișcarea rectilinie uniformă va avea loc și în cazul în care toate acțiunile corpurilor înconjurătoare se compensează reciproc.

Sub formă vectorială:

$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0), \quad (\vec{v} = \text{const.}), \tag{3.3}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție la momentul t, iar $\vec{r}_0$ — vectorul de poziție la momentul t_0 (de multe ori $t_0 = 0$) (fig. 3.2). Ecuațiile vectoriale (3.3) proiectate pe axa mișcării Ox dau ecuațiile (3.1).

EXPERIMENT

Se realizează montajul din figura 1.29. Bara de rulare (*66*) se orizontalizează cu raportorul (*17*).

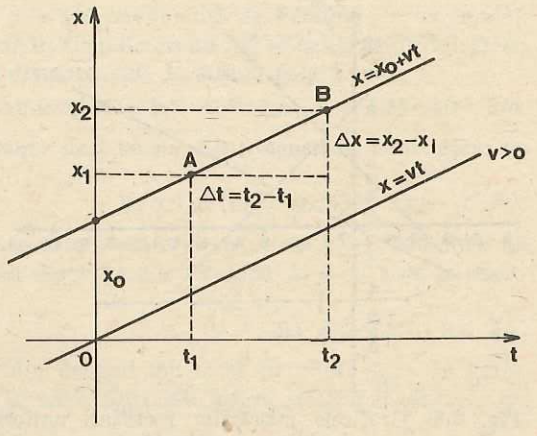
Căruciorul (*27*) încărcat cu greutăți cu șurub (*34*)(150 g) se mișcă inițial sub acțiunea forței F dată de greutățile crestate (*26*). Forța F este anulată apoi prin oprirea greutăților (*26*) pe placa de amortizare (*31*), mișcarea căruciorului făcîndu-se în continuare aproximativ uniform, forțele de frecare fiind neglijabile.

a) Se măsoară viteza pentru diferite distanțe Δx, în diferite puncte ale traiectoriei, exact ca în experimentul de la § 1.12. Ce concluzii desprindeți?

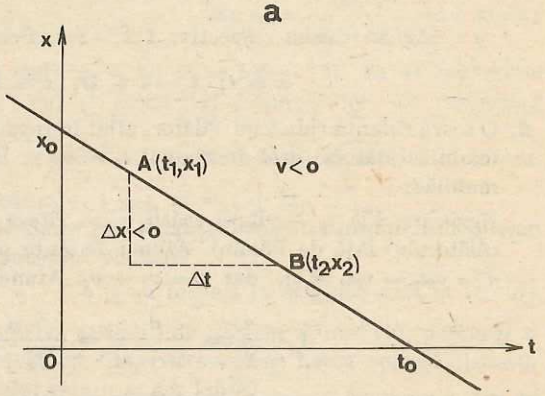
b) Se păstrează întrerupătorul *1* într-o poziție fixă (la începutul riglei gradate) și se mută întrerupătorul *2* din 10 în 10 cm. Pentru fiecare din aceste distanțe se măsoară timpul t. Datele se trec în tabelul următor:

x(m)	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
t(s)					

Reprezentați grafic legea mișcării obținută $x = f(t)$. Calculați panta dreptei (adică $\Delta x/\Delta t$), alegînd două puncte depărtate pe grafic și comparați-o cu viteza obținută mai sus la punctul *a*). Scrieți ecuația dreptei obținute.



a



b

Fig. 3.1. Graficul legii mișcării rectilinii uniforme este o linie dreaptă. *a)* Viteză pozitivă. *b)* Viteză negativă.

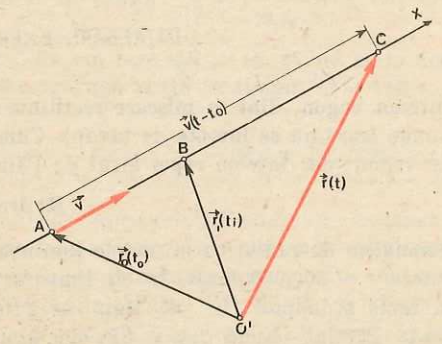


Fig. 3.2. Ecuația mișcării rectilinii uniforme sub formă vectorială.

PROBLEME REZOLVATE

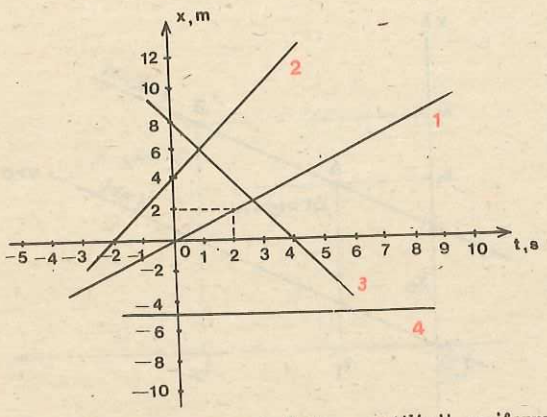


Fig. 3.3. Graficele mișcărilor rectilinii uniforme la problema rezolvată 1.

1. **Să se scrie ecuațiile mișcărilor rectilinii uniforme, reprezentate în figura 3.3.**

Rezolvare. Pe axa Ox, la intersecția cu graficul mișcării, citim coordonata inițială x_0 pentru $t = 0$. Găsim respectiv: 0; 4; 8; -5. Viteza se găsește luînd două puncte convenàbile pe grafic (fie punctele de intersecție cu axele, fie originea și un punct de pe grafic), ducînd paralele la axe și calculînd raportul catetelor în triunghiul format: $v = \Delta x/\Delta t$. Găsim respectiv: 1;2;-2;0. Prin urmare, ecuațiile sînt ($x = x_0 + vt$):

$$x = t;\quad x = 4 + 2t;\quad x = 8 - 2t;\quad x = -5.$$

2. O scară rulantă ridică un călător, aflat în repaus pe scară, în timpul $t_1 = 30$ s. Pe scara imobilă călătorul urcă în timpul $t_2 = 60$ s. În cît timp t urcă călătorul pe scara mobilă?

Rezolvare. Fie v_s — viteza scării, v_c — viteza călătorului față de scară și v — viteza călătorului față de Pămînt. Atunci distanța parcursă se scrie în cele trei cazuri: $d = v_s t_1 = v_c t_2 = vt$, dar $v = v_c + v_s$. Atunci

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{v_c + v_s} = \frac{d}{d/t_2 + d/t_1} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 20 \text{ s}.$$

3. Două trenuri merg unul spre celălalt cu viteze $v_1 = 72$ km/h și $v_2 = 54$ km/h. Un călător din primul tren observă că trenul al doilea trece prin dreptul său un timp $\tau = 4{,}0$ s. Care este lungimea trenului al doilea? Care sistem de referință este mai potrivit pentru rezolvare?

Rezolvare. Față de călătorul din primul tren, trenul al doilea trece cu viteza $v_1 + v_2$, deci $l_2 = (v_1 + v_2)\tau = 140$ m. Se poate raționa și față de trenul al doilea.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Într-un vagon aflat în mișcare rectilinie uniformă un elev aruncă vertical în sus o minge (care nu se lovește de tavan). Cum va arăta traiectoria mingii în reperul legat de vagon; dar într-un reper legat de Pămînt?

R: dreaptă verticală; curba din fig. 2.16 (parabolă).

2. Semnalele de radio, ca și undele luminoase, se propagă în vid rectiliniu uniform cu viteza $c = 300\,000$ km/s. În cît timp un semnal de radio se propagă de la Pămînt la Lună și înapoi? În cît timp se propagă lumina de la Soare la Pămînt? (Distanța Pămînt – Lună $d_{PL} = 384\,000$ km, Pămînt-Soare $d_{PS} = 149{,}5 \cdot 10^6$ km.)

R: $t = 2\dfrac{d_{PL}}{c} = 2{,}56$ s; $t = \dfrac{d_{PS}}{c} = 8$ min 18 s.

3. Steaua polară se află la o distanță $d = 460$ ani lumină de Pămînt. Un an lumină reprezintă distanța parcursă de lumină în timp de un an. Să se calculeze în kilometri valoarea unui an-lumină, precum și distanța pînă la steaua polară.

R: 1 an-lumină $= 9{,}5 \cdot 10^{12}$ km; $d = 4{,}37 \cdot 10^{15}$ km.

4. În cît timp lumina parcurge o distanță de 1,00 m, dar diametrul unui atom de hidrogen ($1{,}06 \cdot 10^{-10}$ m)?

R: 3,3 ns (nanosecunde); $0{,}35 \cdot 10^{-18}$ s.

5. Sunetul se propagă în aer practic rectiliniu uniform cu viteza $c = 340$ m/s. La ce distanță s-a produs un fulger, dacă sunetul s-a auzit după $\Delta t = 10$ s de la observarea fulgerului?

R: $d = c\Delta t = 3{,}4$ km.

6. Un autobuz merge prima jumătate din drumul său total cu viteza $v_1 = 60$ km/h, iar cealaltă jumătate cu viteza $v_2 = 40$ km/h. Care este viteza medie a autobuzului pe întreaga distanță?

R: $v_m = \dfrac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 48$ km/h.

7. Ecuațiile mișcării a doi bicicliști sînt: $x_1 = 8t$, $x_2 = 200 - 12t$. Să se reprezinte grafic legile mișcării și să se afle locul și momentul întîlnirii lor. Ce reprezintă coeficientul lui t în aceste ecuații?

R: $x = 80$ m, $t = 10$ s; viteza.

8. Ecuațiile mișcării a două mobile sînt: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + 2t$.
Să se construiască graficele mișcării. Să se afle locul și momentul întîlnirii mobilelor. Care este semnificația fizică a răspunsului obținut?

R: $x = 0$, $t = -1$ s (s-au întîlnit în originea axei în trecut).

9. O barcă cu motor, mișcîndu-se împotriva sensului de curgere a unui rîu, parcurge o distanță $d = 9{,}0$ km în $\tau = 0{,}50$ h. În cît timp va parcurge barca aceeași distanță înapoi, dacă viteza de curgere a rîului este $v = 6{,}0$ km/h?

R: $\tau' = \tau\dfrac{d}{d + 2v\tau} = 0{,}30$ h $= 18$ min.

10. Distanța $d = 100$ km dintre două porturi fluviale este parcursă de o șalupă în sensul curentului în $t_1 = 4{,}0$ h, iar împotriva curentului în $t_2 = 10{,}0$ h. Care este viteza apei și viteza șalupei față de apă?

R: $v_a = \dfrac{t_2 - t_1}{2t_1 t_2} d = 7{,}5$ km/h; $v_0 = \dfrac{t_1 + t_2}{2t_1 t_2} d = 17{,}5$ km/h.

11. În cît timp este ridicat de o scară rulantă un om care stă pe ea, știind că la aceeași viteză relativă față de scară, omul urcă scara nemișcată în timpul $t_1 = 120$ s, iar pe scară mobilă în $t_2 = 30$ s?

R: $T = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 40$ s.

12. Din București și Ploiești pleacă simultan unul spre celălalt cîte un autobuz cu vitezele constante $v_1 = 60$ km/h și respectiv $v_2 = 40$ km/h. În același moment dintr-unul din autobuze își ia zborul spre celălalt autobuz un porumbel călător, care continuă să zboare neîntrerupt, între cele două autobuze, de la unul la celălalt, cu viteza constantă $v = 70$ km/h, pînă la întîlnirea autobuzelor. Ce drum total străbate porumbelul? (Distanța București — Ploiești este $d = 60$ km.)

R: $s = d\dfrac{v}{v_1 + v_2} = 42$ km.

13. Pe șoseaua București-Brașov, pleacă din București un camion cu viteza $v_1 = 50$ km/h. Din Ploiești (la distanța $s_0 = 60$ km) pleacă un alt camion cu viteza $v_2 = 60$ km/h, după un timp $t_0 = 1{,}5$ h de la plecarea primului camion. După cît timp și în ce loc se vor întîlni camioanele? Să se reprezinte grafic pe aceeași diagramă coordonatele celor două camioane în funcție de timp.

R: $T = \dfrac{v_2 t_0 - s_0}{v_2 - v_1} = 3{,}0$ h; $L = v_1 T = 150$ km.

14. Un barcagiu vîslește perpendicular către țărm cu o viteză $v_0 = 7{,}2$ km/h față de apă. Cursul apei deplasează barca cu o distanță $d = 150$ m în josul rîului. Lățimea rîului este $L = 500$ m. Care este viteza rîului și durata traversării rîului?

R: $v = v_0 d/L = 0{,}60$ m/s; $T = L/v_0 = 4$ min 10 s.

15. Pe un strung trebuie strunjită o piesă de forma unui trunchi de con cu razele bazelor $r_1 = 15$ mm, $r_2 = 20$ mm și înălțimea $h = 50$ mm. Viteza de deplasare longitudinală a cuțitului este $v_1 = 5{,}0$ mm/s. Care trebuie să fie viteza v_2 de avans transversal?

R: $v_2 = v_1 \dfrac{r_2 - r_1}{h} = 0{,}50$ mm/s.

3.2. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ

Dacă vectorul forță este *constant*, atunci din legea fundamentală rezultă că *și vectorul accelerație este constant:* $\vec{a} = \vec{F}/m = \text{const}$. În acest caz accelerația medie coincide cu accelerația momentană: $\vec{a}_m = \vec{a}$.

Dacă forța are direcția vitezei, mișcarea va fi *rectilinie*. În adevăr, accelerația și variația vitezei au direcția și sensul forței: $\vec{F} = m\vec{a} = m\Delta\vec{v}/\Delta t$, deci în acest caz variația vitezei $\Delta\vec{v}$ are direcția vitezei, care își păstrează astfel direcția neschimbată.

Vectorii forță, viteză și accelerație sînt toți pe aceeași dreaptă pe care o alegem drept axă a coordonatelor Ox (a absciselor). Sensul pozitiv pe axă se alege de obicei în sensul vitezei (inițiale).

3.2.1. **Legea vitezei.** Din definiția accelerației rezultă:

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \text{const.} \rightarrow v = v_0 + a(t - t_0), \tag{3.4}$$

unde v este viteza la un moment oarecare t și v_0 este viteza la momentul t_0, iar a este *accelerația constantă*. Aceasta este *ecuația sau legea vitezei în mișcarea rectilinie uniform variată.*

În particular, dacă viteza (inițială) v_0 este cunoscută pentru momentul (inițial) $t = 0$ (adică $t_0 = 0$), ecuația de mai sus devine:

$$v = v_0 + at. \tag{3.5}$$

În diagrama viteză — timp această ecuație se reprezintă printr-o *linie dreaptă* (fig. 3.4 și 3.5), de aceea se spune că *în mișcarea rectilinie uniform*

variată viteza variază liniar cu timpul sau *este o funcție liniară de timp* (adică este un polinom de gradul întîi în timp). Panta acestei drepte este chiar accelerația a.

Viteza inițială v_0 (la momentul inițial $t = 0$) poate fi pozitivă (mobilul se mișcă în momentul $t = 0$ în sensul pozitiv al axei), negativă (mobilul se mișcă în momentul $t = 0$ în sensul negativ al axei) sau nulă (mobilul era în repaus în momentul $t = 0$). În ultimul caz legea (3.5) devine $v = at$, adică viteza crește proporțional cu timpul. De obicei alegem sensul pozitiv al axei în sensul vitezei inițiale v_0 (atunci $v_0 > 0$) sau al accelerației dacă $v_0 = 0$ (atunci $a > 0$).

Din graficul vitezei putem determina accelerația, luînd două puncte pe grafic $A(t_1, v_1)$ și $B(t_2, v_2)$ și calculînd $\Delta v/\Delta t$, adică panta dreptei (fig. 3.4 și 3.5).

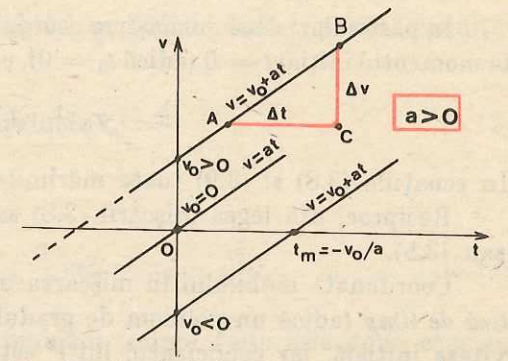


Fig. 3.4. Graficul vitezei în mișcarea uniform variată (accelerație pozitivă).

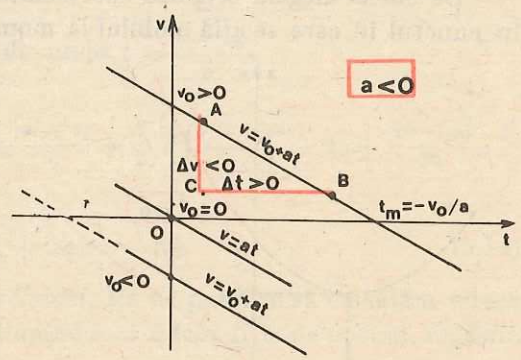


Fig. 3.5. Graficul vitezei în mișcarea uniform variată (accelerație negativă).

3.2.2. **Legea mișcării.** Din expresia vitezei medii $v_m = \Delta x/\Delta t = (x - x_0)/(t - t_0)$, rezultă

$$x = x_0 + v_m(t - t_0). \tag{3.6}$$

În mișcarea uniform variată, cînd viteza este o funcție *liniară* de timp, viteza medie este egală cu *media aritmetică* a vitezelor inițială și finală pe intervalul considerat, de aceea (3.6) devine:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0). \tag{3.7}$$

Cum $v = v_0 + a(t - t_0)$, ecuația (3.7) devine:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \tag{3.8}$$

Aceasta este *legea mișcării rectilinii uniform variate.*

Pentru a scrie ecuația (3.8) trebuie să cunoaștem *condițiile inițiale, adică coordonata și viteza la un moment dat:* $x = x_0$ și $v = v_0$ pentru $t = t_0$.

În particular, dacă cunoaștem coordonata (inițială) x_0 și viteza (inițială) v_0 la momentul inițial $t = 0$ (adică $t_0 = 0$), ecuația precedentă devine mai simplă:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \tag{3.9}$$

În ecuațiile (3.8) și (3.9) toate mărimile pot fi pozitive, negative sau nule.

Reciproc, din legea mișcării (3.8) sau (3.9) se obține legea vitezei (3.4) sau (3.5).

Coordonata mobilului în mișcarea uniform variată este o funcție *pătratică de timp* (adică un polinom de gradul doi în timp). Coeficientul lui t este viteza inițială, iar coeficientul lui t^2 este *jumătate* din accelerație (termenul liber este coordonata inițială).

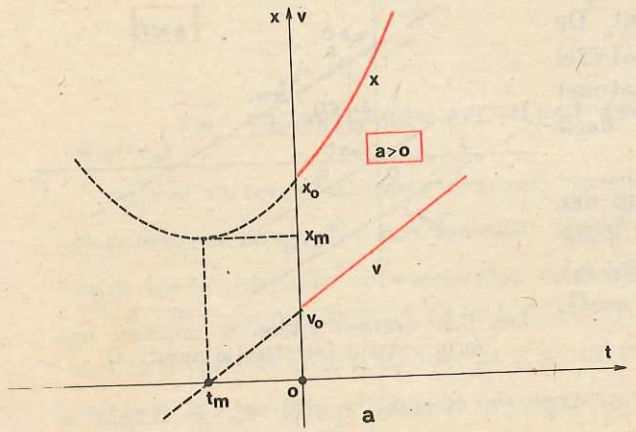
De obicei alegem originea coordonatelor (de unde măsurăm coordonata) în punctul în care se află mobilul la momentul inițial $t = 0$, atunci $x_0 = 0$, iar sensul pozitiv al axei îl luăm în sensul vitezei inițiale v_0, atunci $v_0 > 0$. În cazul $x_0 = 0$, avem

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \tag{3.10}$$

Dacă și $v_0 = 0$, ecuația devine

$$x = \frac{1}{2} at^2, \tag{3.11}$$

adică, dacă mobilul pleacă din repaus din originea coordonatelor, coordonata sa este proporțională cu *pătratul timpului*.



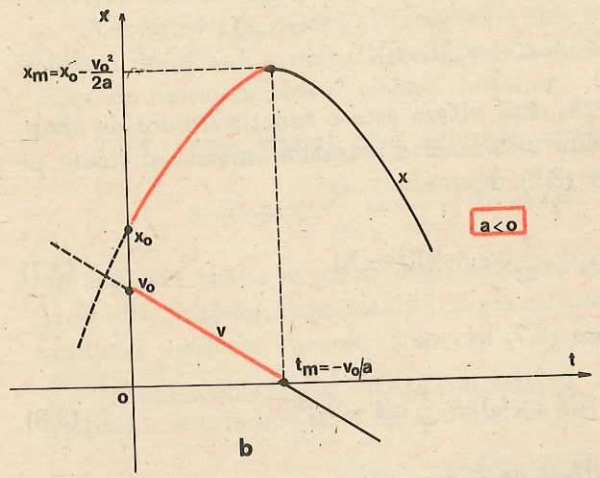


Fig. 3.6. *a)* Dacă accelerația este pozitivă, coordonata are un minim cînd mobilul are viteză nulă. *b)* Dacă accelerația este negativă coordonata are un maxim în momentul opririi (pentru $v = 0$).

Reprezentînd grafic legea (3.9), obținem curbele din figura 3.6 (graficul unei funcții pătratice este o *parabolă*). De obicei $v_0 > 0$ și ne interesează mișcarea numai pentru $t > 0$.

Dacă accelerația este *negativă*, graficul are un maxim în momentul opririi mobilului.

Dacă $v_0 > 0$ și $a < 0$ mobilul se depărtează de origine *încetinit*, la un moment dat se oprește ($v = 0$, x maxim) și se întoarce înapoi ($v < 0$). Durata mișcării pînă la oprire se obține imediat, punînd condiția de oprire $v = 0$:

$$0 = v_0 + at, \text{ de unde } t_m = -\frac{v_0}{a}, \tag{3.12}$$

iar coordonata maximă

$$x_m = x_0 + v_0 t_m + \frac{1}{2} at_m^2 = x_0 - \frac{v_0^2}{2a}. \tag{3.13}$$

3.2.3. **Formula lui Galilei.** Să eliminăm timpul t din cele două ecuații, a vitezei (3.5) și a coordonatei (3.9). Scoatem timpul din ecuația vitezei și îl introducem în ecuația coordonatei:

$$v = v_0 + at, \text{ de unde } t = \frac{v - v_0}{a},$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

sau

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{3.14}$$

Aceasta este *ecuația sau formula lui Galilei*. Ea ne permite să calculăm viteza mobilului pentru orice poziție a sa. Punînd $v = 0$ (condiția de oprire), regăsim (3.13).

De obicei $x_0 = 0$, adică alegem originea coordonatelor în punctul în care se afla mobilul la $t = 0$. Atunci (3.14) devine

$$v^2 = v_0^2 + 2ax. \tag{3.15}$$

În particular, dacă și $v_0 = 0$, adică mobilul pleacă din repaus (la $t = 0$), avem

$$v^2 = 2ax. \tag{3.16}$$

Menționăm că ecuațiile mișcării rectilinii uniform variate se pot scrie *vectorial* astfel:

$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}, \text{ de unde } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0), \tag{3.17}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2. \tag{3.18}$$

Bineînțeles, din legea mișcării (3.18) se poate obține prin procedeul cunoscut legea vitezei (3.17). Proiectînd aceste ecuații vectoriale pe axa mișcării, obținem ecuațiile algebrice cunoscute (pe componente). Mai mult, aceste ecuații vectoriale sînt valabile chiar dacă vectorii $\vec{v}_0$ și $\vec{a}$ ($\vec{a} = \text{const}$) *nu* sînt coliniari și deci mișcarea *nu* este rectilinie ci curbilinie în planul definit de vectorii $(\vec{v}_0, \vec{a})$ sau $(\vec{v}_0, \vec{F})$, de exemplu în cazul aruncării în vid în cîmpul gravitațional terestru (atunci $\vec{a} = \vec{g}$).

Se foloseşte montajul din figura 1.29.

a) Legea mişcării rectilinii uniform variate. Se procedează ca la experimentul de la § 3.1, (*b*).

Se va reprezenta grafic legea mişcării $x = f(t)$. Teoretic, ecuaţia mişcării trebuie să fie $x = \frac{1}{2} at^2$ (parabolă). Dacă trasăm graficul $x = F(t^2)$ trebuie să obţinem o *dreaptă* cu panta $\frac{a}{2}$. De aceea se va trasa şi graficul $x = F(t^2)$ şi luînd două puncte convenabile pe grafic (aproximat printr-o dreaptă) se va calcula panta $a/2$ deci acceleraţia a.

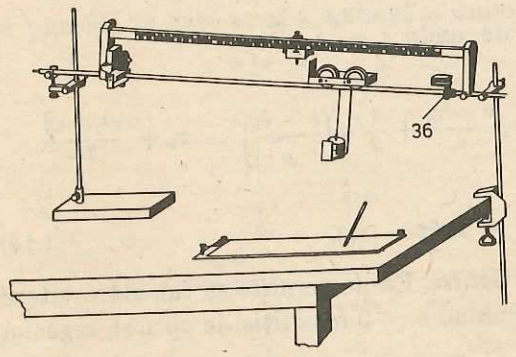


Fig. 3.7. Montaj pentru verificarea legilor mişcării rectilinii uniform variate.

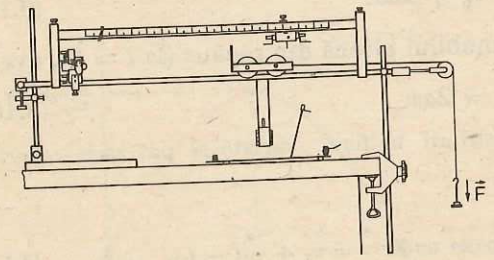


Fig. 3.8. Montaj pentru verificarea legii fundamentale a dinamicii.

b) Legea vitezei în mişcarea rectilinie uniform variată. Se montează dispozitivul de prindere (*31*, *32*) astfel încît să reţină greutăţile (*26*) cînd căruciorul a străbătut fiecare din distanţele x de la experimentul precedent (fig. 3.7). În dreptul fiecărei valori x, se montează întrerupătorul (*18*) şi la o distanţă convenabilă $\Delta x'$ de acesta se montează întrerupătorul (*23*). Pe distanţa Δx parcursă în timpul $\Delta t'$, căruciorul se mişcă practic uniform *cu viteza avută în dreptul coordonatei* x, deci $v(x) = \Delta x'/\Delta t'$.

Se va reprezenta grafic legea vitezei $v = f(t)$. Teoretic, legea vitezei trebuie să fie $v = at$ (dreaptă). Se va calcula panta dreptei obţinute, deci acceleraţia a, şi se va compara cu acceleţia obţinută în experienţa precedentă, din legea mişcării.

c) Legea fundamentală a dinamicii. Se realizează montajul din figura 3.8 (montajul detaliat este dat în figura 1.29). Se aleg diferite distanţe x ($\sim 0{,}5 - 0{,}7$ m) de la vîrful electromagnetului pînă la întrerupătorul *2*. Forţa F este dată de greutăţile crestate (*26*), căruciorul (*27*) fiind încărcat cu greutăţile cu şurub (*34*).

În prima variantă, pentru o distanţă aleasă x se măsoară timpul de mişcare t sub acţiunea *diferitelor forţe* F. Se calculează acceleraţia $a = 2x/t^2$ şi

raportul F/a, care trebuie să coincidă cu masa $(M + m)$ a sistemului (cărucior cu greutăţi cu şurub + cîrligul cu greutăţile crestate).

În a doua variantă, se păstrează *constantă* forţa F dată de greutăţile crestate (*26*) şi se modifică încărcarea M a căruciorului (*27*).

PROBLEME REZOLVATE

Peste tot unde este posibil alegem originea coordonatelor în punctul în care se află mobilul la $t = 0$ (atunci $x_0 = 0$), iar sensul pozitiv pe axa mişcării îl alegem în sensul vitezei iniţiale (atunci $v_0 > 0$) sau al acceleraţiei (forţei) dacă $v_0 = 0$ (atunci $a > 0$).

1. Un şofer începe să frîneze automobilul pe un drum orizontal de la o distanţă $d = 25$ m de un obstacol. Forţa de frînare este $F_f = 1{,}5$ kN, iar masa automobilului $m = 750$ kg.
Care este viteza maximă admisibilă v_0 a automobilului pentru ca acesta să poată opri înainte de obstacol?

Rezolvare. Forţa de greutate a automobilului este anulată de reacţiunea normală a solului. Rămîne forţa de frînare orientată în sens invers mişcării (fig. 3.9). Alegînd axa Ox în sensul mişcării, avem

$$-F_f = ma, \text{ de unde } a = -F_f/m$$

(acceleraţia, la fel ca şi forţa, este orientată în sensul opus vitezei). Aplicînd direct formula (3.13) cu $x_0 = 0$, avem

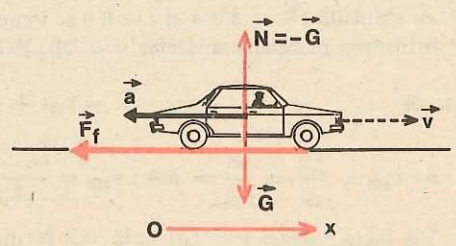


Fig. 3.9. La problema rezolvată 1.

$$d = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2F_f} m, \text{ de unde } v_0 = \sqrt{2F_f d/m} = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}.$$

Putem aplica de asemenea formula lui Galilei (cu $x_0 = 0$), punînd condiţia de oprire $v = 0$.

2. Două corpuri pornesc din acelaşi punct pe aceeaşi direcţie cu vitezele iniţiale $v_{01} = 4{,}0$ m/s, respectiv $v_{02} = 3{,}0$ m/s şi acceleraţiile $a_1 = 2{,}0$ m/s², respectiv $a_2 = 3{,}0$ m/s², corpul *2* însă la un interval $\tau = 2{,}0$ s mai tîrziu decît corpul *1*. Să se afle: *a)* după cît timp şi la ce distanţă se vor întîlni corpurile; *b)* vitezele medii ale corpurilor de la plecare pînă la întîlnire.

Rezolvare. a) Alegem originea timpului în momentul cînd porneşte primul corp, atunci $x_1 = v_{01}t + \frac{1}{2} a_1 t^2$ şi $x_2 = v_{02}(t - \tau) + \frac{1}{2} a_2 (t - \tau)^2$ (pentru al doilea corp t_0 este τ). În momentul întîlnirii $x_1 = x_2$ (corpurile se află în acelaşi punct, la aceeaşi distanţă de origine):

$$v_{01}t + \frac{1}{2} a_1 t^2 = v_{02}(t - \tau) + \frac{1}{2} a_2 (t - \tau)^2,$$

de unde $t^2 - 14t = 0$ cu soluţiile $t = 0$ şi $t = 14$ s. Prima soluţie este inacceptabilă, deoarece corpul *2* pleacă abia peste $\tau = 2{,}0$ s. Coordonata punctului de întîlnire este:

$$x = v_{01}t + \frac{1}{2} a_1 t^2 = 252 \text{ m}.$$

b) Vitezele medii:

$$v_{1m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{252}{14} = 18 \text{ m/s}; \quad v_{2m} = \frac{252}{12} = 21 \text{ m/s}.$$

3. Din originea axei Ox pleacă un mobil cu viteza inițială $v_{01} = 2{,}0$ m/s și accelerația $a_1 = 3{,}0$ m/s². În același moment, dintr-un punct de pe axa Ox, de abscisă $x_0 = 18$ m, pleacă un al doilea mobil cu viteza inițială $v_{02} = 5{,}0$ m/s și accelerația $a_2 = 1{,}0$ m/s².

a) După cît timp și la ce distanță se întîlnesc mobilele? *b)* Care sînt vitezele medii ale mobilelor în acest timp?

Rezolvare. a) Ecuațiile pentru coordonatele celor două mobile sînt:

$$x_1 = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2; \quad x_2 = x_0 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2.$$

Condiția de întîlnire $x_1 = x_2$ dă

$$v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = x_0 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 \text{ sau } t^2 - 3t - 18 = 0$$

cu soluțiile $t = -3{,}0$ s și $t = 6{,}0$ s. Prima soluție este inacceptabilă deoarece înseamnă întîlnirea mobilelor anterior ($t < 0$) plecării lor. Punctul de întîlnire:

$$x = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = 66 \text{ m}.$$

$$b)\ v_{1m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{66}{6{,}0} = \text{m/s}; \quad v_{2m} = \frac{66 - 18}{6{,}0} = 8{,}0 \text{ m/s}.$$

4. Fie legea vitezei $v = f(t)$ dată sub forma tabelului:

t[s]	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	1,0	1,0	1,0	2,0	4,0	8,0	10,0	4,0	0	−2,0	0	0	0

Să se reprezinte grafic această lege. *a)* Să se calculeze accelerația medie în intervalele de timp: (−4; −2) s, (−2; 2) s, (2; 5) s, (5; 6) s și (6; 8)s. *b)* Care este accelerația momentană a mobilului la momentul $t = 2{,}0$ s?

Rezolvare. Graficul este dat în figura 3.10.

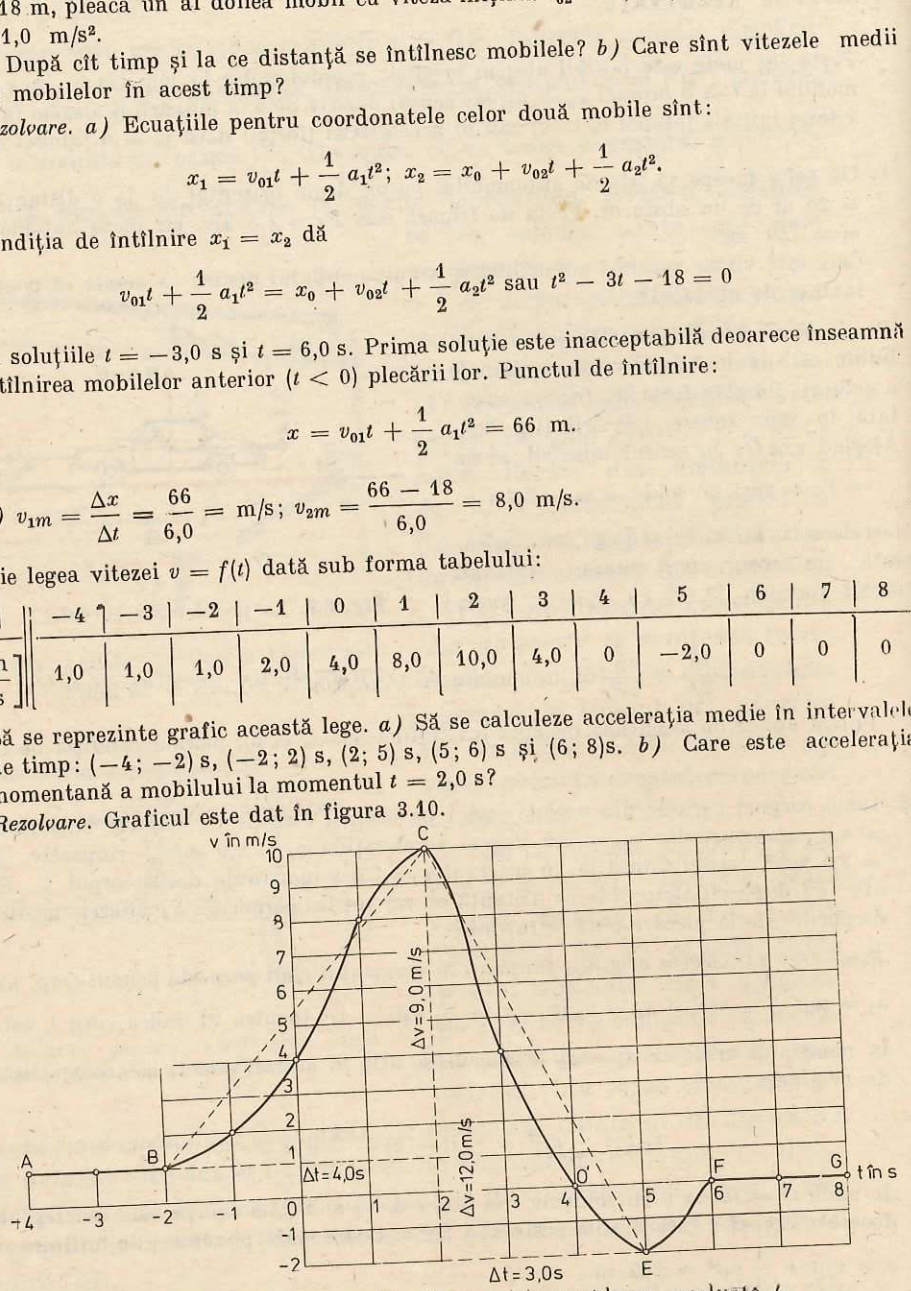


Fig. 3.10. Graficul legii vitezei la problema rezolvată 4.

a) Accelerațiile medii sînt:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0}{2} = 0; \quad \frac{10{,}0 - 1{,}0}{2{,}0 - (-2{,}0)} = 2{,}25 \text{ m/s}^2; \quad \frac{-2{,}0 - 10{,}0}{5{,}0 - 2{,}0} = -4{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\frac{0{,}0 - (-2{,}0)}{6{,}0 - 5{,}0} = 2{,}0 \text{ m/s}^2; \quad \frac{0}{2} = 0.$$

b) Pentru un interval Δt foarte mic, descrescînd către zero, luat la $t = 2{,}0$ s, variația Δv este zero, viteza este constantă, graficul vitezei fiind aici orizontal, deci $a = 0$.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Cum va arăta graficul vitezei în cazul accelerației nule?

R: dreaptă orizontală.

2. Legea mișcării rectilinii a unui corp este dată de ecuația $x = 2{,}0 + 1{,}5t + t^2$. Să se scrie legea vitezei.

R: $v = 1{,}5 + 2t$.

3. Dacă accelerația *nu* este constantă, se poate calcula viteza medie în mișcarea rectilinie ca media aritmetică $v_m = (v_0 + v)/2$?

R: nu.

4. Să se arate că pentru mișcarea uniform variată avem:

$$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}t.$$

5. Un tren electric se mișcă cu viteza $v_0 = 72$ km/h. Întrerupîndu-se curentul electric, trenul se oprește (uniform încetinit) după $\Delta t = 20$ s. Să se afle accelerația și distanța pînă la oprire.

R: $a = -\frac{v_0}{\Delta t} = -1{,}0 \text{ m/s}^2$; $d = \frac{1}{2}v_0\Delta t = 200$ m.

6. Un automobil pornește cu accelerația $a = 0{,}40$ m/s². Cît timp îi trebuie ca să-și mărească viteza de la $v_1 = 12$ m/s la $v_2 = 20$ m/s?

R: $\Delta t = \frac{v_2 - v_1}{a} = 20$ s.

7. O săniuță coboară liber, uniform accelerat, pe un deal de lungime $l = 60$ m într-un timp $t = 10$ s. Care a fost accelerația și ce viteză a căpătat la sfîrșitul dealului?

R: $a = \frac{2l}{t^2} = 1{,}2 \text{ m/s}^2$, $v = \frac{2l}{t} = 12$ m/s.

8. Un schior parcurge cu accelerația $a = 0{,}30$ m/s² o porțiune de pistă $\Delta x = 100$ m în $\Delta t = 20$ s. Care a fost viteza schiorului la începutul și la sfîrșitul porțiunii de pistă?

R: $v_{1,2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mp a\frac{\Delta t}{2} = 2{,}0$ și $8{,}0$ m/s.

9. Un corp cu masa $m = 0{,}50$ kg este tras orizontal rectiliniu uniform pe o masă orizontală (cu frecare) cu ajutorul unui dinamometru care arată o forță $F_1 = 2{,}0$ N. Cu ce accelerație se va mișca același corp dacă dinamometrul va arăta $F_2 = 3{,}0$ N?

R: $a = \frac{F_2 - F_1}{m} = 2{,}0 \text{ m/s}^2$.

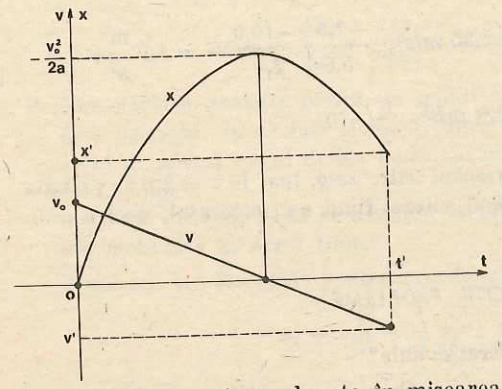


Fig. 3.11. Viteza și coordonata în mișcarea uniform variată din problema 12.

10. Un corp pornește fără viteză inițială. În prima secundă el parcurge o distanță egală cu 1 m, în a doua secundă parcurge o distanță egală cu 2 m și așa mai departe, în a n-a secundă parcurge o distanță egală cu n metri. Este aceasta o mișcare uniform accelerată?

R: nu.

11. Un corp pornește uniform accelerat cu viteza inițială $v_0 = 2{,}0$ m/s și ajunge în punctul $x_0 = 300$ m după $\tau = 1{,}0$ min. Să se afle accelerația și viteza finală.

R: $a = 2(x_0 - v_0\tau)/\tau^2 = 0{,}10$ m/s²; $v' = 2x_0/\tau - v_0 = 8{,}0$ m/s.

12. Un mobil pornește uniform variat din originea axei Ox cu viteza inițială $v_0 = 15$ m/s. După un timp t' mobilul trece prin punctul de abscisă $x' = 10$ m cu viteza $v' = -10$ m/s. Să se calculeze: *a)* accelerația; *b)* timpul t'; *c)* distanța parcursă în acest timp; *d)* viteza în modul, medie. Să se reprezinte grafic, pe aceeași diagramă, viteza și coordonata.

R: *a)* $a = \dfrac{v'^2 - v_0^2}{2x'} = -6{,}25$ m/s²; *b)* $t' = \dfrac{2x'}{v_0 + v'} = 4{,}0$ s;

c) $d = x' \dfrac{v_0^2 + v'^2}{v_0^2 - v'^2} = 26$ m; *d)* $|v|_m = \dfrac{d}{t'} = \dfrac{v_0^2 + v'^2}{2(v_0 - v')} = 6{,}5$ m/s;

curba și dreapta din figura 3.11.

13. Un corp mișcat uniform variat parcurge prima jumătate din drumul său $d = 150$ m în timpul $t_1 = 10$ s, iar cealaltă jumătate în $t_2 = 5{,}0$ s. Să se afle accelerația și viteza inițială ale corpului.

R: $a = d\dfrac{t_1 - t_2}{t_1 t_2(t_1 + t_2)} = 1{,}0$ m/s²; $v_0 = d/2t_1 - \dfrac{1}{2}at_1 = 2{,}5$ m/s.

14. Din originea axei Ox pleacă un mobil cu viteza constantă $v' = 1{,}0$ m/s, iar după $\tau = 5{,}0$ s un al doilea mobil cu viteza inițială $v_0 = 5{,}0$ m/s și accelerația $a = -0{,}70$ m/s². Să se afle după cît timp de la pornirea mobilului 2 se vor întîlni mobilele.

R: $v'(t + \tau) = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$, de unde $t = \dfrac{10}{7}$ s și 10 s.

3.3. MIȘCAREA CORPURILOR SUB ACȚIUNEA GREUTĂȚII

3.3.1. **Căderea liberă.** Greutatea unui corp este *forța* cu care acesta întinde firul sau resortul de care este suspendat. Ea are direcția „firului cu plumb". Sau, altfel, greutatea unui corp este forța cu care acesta apasă asupra unui plan orizontal pe care este așezat (planul orizontal este perpendicular pe direcția firului cu plumb). Greutatea unui corp se datorește atracției gravitaționale

dintre corp și Pămînt. Dacă neglijăm efectele rotației proprii diurne a Pămîntului și neomogenitățile globului terestru (care sînt într-adevăr neglijabile în majoritatea covîrșitoare a nevoilor practicii), atunci:

Greutatea unui corp este forța cu care acesta este atras de Pămînt, ea are direcția razei terestre din acel loc.

Corpurile lăsate liber în vid, fără viteză inițială, cad vertical, sub acțiunea greutății lor, cu aceeași accelerație gravitațională $\vec{g}$ ($g \approx 9{,}8$ m/s²), independentă de masa corpului, natura, dimensiunile sau forma corpurilor. Conform legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$, rezultă atunci

$$\vec{G} = m\vec{g}, \tag{3.19}$$

unde $\vec{g}$ în același loc este același pentru toate corpurile. Aceasta se poate dovedi experimental cu ajutorul tubului lui Newton — un tub de sticlă vidat în care sînt introduse diferite obiecte. Răsturnînd tubul, toate obiectele cad la fel, cu aceeași accelerație. În aer însă, corpurile cad cu accelerații diferite, fiindcă pe lîngă greutatea lor $m\vec{g}$, acționează și o forță de rezistență din partea aerului, care depinde sensibil de dimensiunile și de forma corpului. În tot ce urmează vom neglija forța de rezistență a aerului (deci vom considera corpuri mici și grele).

Accelerația gravitațională de cădere liberă $\vec{g}$ depinde de altitudine (de distanța pînă la centrul Pămîntului) și puțin de latitudine (din cauza turtirii Pămîntului la poli și a rotației Pămîntului).

Accelerația gravitațională *normală* (sau standard) se consideră:

$$g_n = 9{,}80665 \ \text{m/s}^2. \tag{3.20}$$

La nivelul mării și la paralela 45° : $g_0 = 9{,}80616$ m/s².

Prin urmare, toate corpurile care se mișcă liber în vid au aceeași accelerație $\vec{g} = \vec{G}/m$, orientată vertical în jos la fel ca și forța de greutate $\vec{G}$ (fig. 2.16).

Dacă viteza inițială este verticală (sau nulă), corpul se va mișca pe verticală (forța fiind verticală) *uniform variat*. Alegînd axa Oy vertical în sus, avem

$$v = v_0 - g(t - t_0),\ y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2,\ (g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2) \tag{3.21}$$

și în particular, dacă condițiile inițiale y_0, v_0 se referă la momentul $t = 0$ (adică $t_0 = 0$), avem mai simplu

$$v = v_0 - gt,\ y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,\ (g \approx 9{,}8\ \text{m/s})^2. \tag{3.22}$$

În ecuațiile de mai sus, y, y_0, v, v_0 pot avea diferite semne, în funcție de poziția și sensul mișcării corpului pe axa aleasă Oy ($-g$ este componenta vectorului accelerație $\vec{g}$ pe axa Oy aleasă).

Desigur, se poate alege o axă Oy cu sensul pozitiv în jos, atunci

$$v = v_0 + g(t - t_0), \quad y = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} g(t - t_0)^2, \quad (g \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2), \quad (3.23)$$

unde y, y_0, v, v_0 au semne corespunzătoare noii axe ($+g$ este acum componenta vectorului $\vec{g}$ pe axa aleasă).

EXEMPLE

1. Un corp cade liber (fără viteză inițială) de la o înălțime h. Să se afle viteza și timpul de cădere.

Rezolvare. Este mai convenabil să alegem axa verticală Oy cu sensul pozitiv în jos și cu originea în punctul de unde cade corpul la momentul $t = 0$ (fig. 3.12). Atunci

$$v = gt, \quad h = \frac{1}{2} gt^2, \text{ de unde } v = \sqrt{2gh}, \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (3.24)$$

corpul cade accelerat cu accelerația g.

2. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0. Să se afle timpul de urcare și înălțimea maximă la care se ridică corpul.

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical, cu sensul pozitiv în sus și cu originea în punctul de unde se aruncă corpul (fig. 3.13). Atunci

$$v = v_0 - gt, \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (3.25)$$

Punînd condiția de oprire $v = 0$, găsim timpul de urcare și apoi înălțimea maximă:

$$0 = v_0 - gt, \quad t_u = \frac{v_0}{g}, \quad h = y_m = v_0 t_u - \frac{1}{2} g t_u^2 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (3.26)$$

corpul urcă încetinit cu accelerația $-g$.

Aceste rezultate se obțin și din formulele (3.12—3.13) pentru timpul pînă la oprire și distanța maximă din cazul mișcării uniform încetinite, dacă punem acolo $a = -g$.

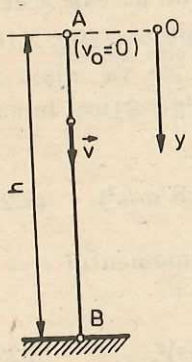


Fig. 3.12. Căderea liberă de la o înălțime h. (Exemplul 1.)

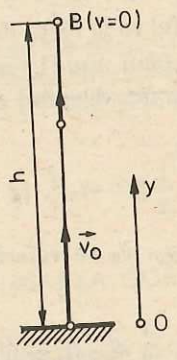


Fig. 3.13. Aruncarea unui corp vertical în sus cu viteza inițială v_0. (Exemplul 2.)

După atingerea înălțimii maxime și oprire, corpul cade înapoi accelerat și cînd ajunge din nou la punctul de lansare va avea viteza finală v', egală în modul și de sens opus cu viteza inițială de lansare v_0. De asemenea, timpul de urcare este egal cu timpul de coborîre:

$$v' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \cdot \frac{v_0^2}{2g}} = v_0;$$

$$t_u = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{2}{g}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_c. \quad (3.27)$$

Observăm că ecuațiile (3.25) descriu atît urcarea, cît și coborîrea ulterioară a corpului.

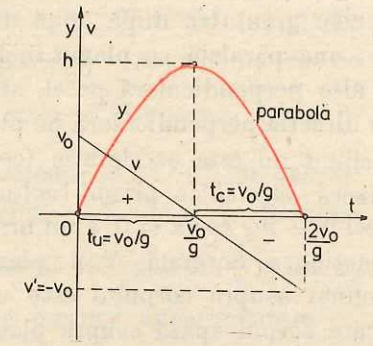


Fig. 3.14. Graficul vitezei și coordonatei unui corp aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0.

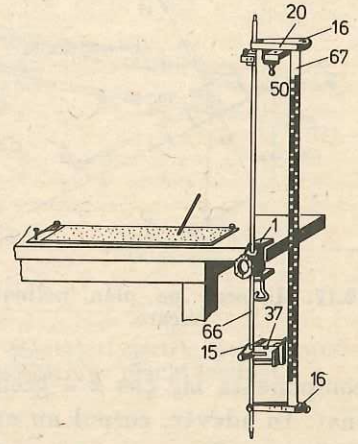


Fig. 3.15. Montajul mecanic pentru studiul căderii libere.

Dacă reprezentăm grafic pe aceeași diagramă pe v și pe y în funcție de timp: $v = v_0 - gt$, $y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$, obținem o linie dreaptă (pentru v) și o parabolă (pentru y) (fig. 3.14).

EXPERIMENT

Studiul căderii libere. Montajul mecanic este dat în figura 3.15.

Corpul a cărui mișcare se analizează este o bilă (*50*) din oțel. Din vîrful miezului electromagnetului (*20*) se lasă să cadă bila pe clapeta captorului (*37*).

Montajul electric este dat în figura 3.16.

Experimentul se face montînd captorul, succesiv, la diferite distanțe y față de reperul 0 al riglei și măsurînd de fiecare dată timpul t de cădere.

Se va reprezenta grafic legea mișcării $y = f(t)$. Teoretic: $y = \frac{1}{2} gt^2$ — parabolă. De aceea, se va trasa și graficul $y = F(t^2)$, care trebuie să fie o dreaptă cu panta $g/2$, de unde se obține accelerația gravitațională g.

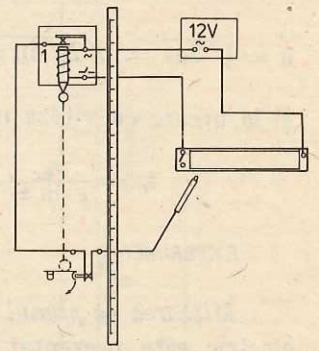


Fig. 3.16. Montajul electric pentru studiul căderii libere.

3.3.2. **Mișcarea pe plan înclinat.** Vom neglija frecările dintre corp și planul înclinat (de exemplu, un cărucior pe șine netede). În acest caz asupra corpului acționează: forța de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ și reacțiunea normală $\vec{N}$ a planului

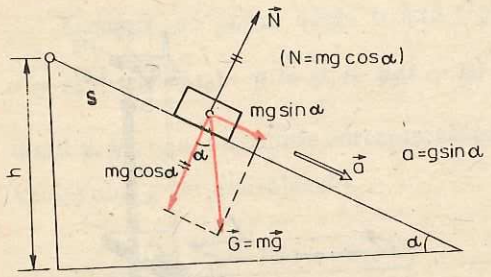


Fig. 3.17. Mișcarea pe plan înclinat fără frecare.

înclinat (fig. 3.17). Dacă descompunem greutatea după două direcții: una paralelă cu planul înclinat și alta perpendiculară pe el, atunci pe direcția perpendiculară pe planul înclinat nu este accelerație (corpul lunecă *paralel* cu planul înclinat!), deci $N - mg \cos \alpha = 0$. Prin urmare reacțiunea normală N a planului înclinat asupra corpului este egală cu componenta $mg \cos \alpha$ a greutății, cu care corpul apasă asupra planului înclinat. În adevăr, corpul nu apasă asupra planului înclinat cu toată greutatea sa mg, ci numai cu componenta normală $mg \cos \alpha$, cealaltă componentă $mg \sin \alpha$ fiind *paralelă* cu planul înclinat.

Componenta $mg \sin \alpha$, paralelă cu planul înclinat (ea este bineînțeles rezultanta celor două forțe $\vec{G}$ și $\vec{N}$), imprimă corpului o accelerație

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha \qquad (3.28)$$

în direcția și sensul acestei forțe, adică paralelă cu planul înclinat și îndreptată în jos.

Prin urmare, un corp lăsat liber pe un plan înclinat fără frecări, va coborî uniform accelerat cu accelerația $a = g \sin \alpha$, iar lansat în sus de-a lungul planului înclinat cu viteza inițială v_0 va urca încetinit, se va opri și apoi se va întoarce înapoi accelerat. Situația este perfect asemănătoare cu cea din mișcarea pe verticală în cîmp gravitațional, cu singura deosebire că mișcarea se face paralel cu planul înclinat (și nu pe verticală), cu accelerația $a = g \sin \alpha$ (în loc de g).

Dacă notăm cu h înălțimea de la care coboară liber corpul și cu s lungimea corespunzătoare a planului înclinat, atunci $h = s \sin \alpha$. Deci la coborîre liberă (fără viteză inițială):

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2gs \sin \alpha \cdot s} = \sqrt{2gh}, \; t_c = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (3.29)$$

și la urcare cu viteza inițială v_0:

$$t_u = \frac{v_0}{g \sin \alpha}, \; s = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}, \; h = \frac{v_0^2}{2g}; \; (t_c = t_u, \; v' = -v_0). \qquad (3.30)$$

EXPERIMENT

Mișcarea pe planul înclinat. Se reface montajul din figura 1.29. Montajul electric este prezentat în figura 3.18.

Experimentul se realizează înclinînd bara de rulare cu 5°, fixînd întrerupătorul la diferite distanțe x și măsurînd timpul de mișcare respectiv.

Se va reprezenta grafic legea mișcării $x = f(t)$. Teoretic (cu neglijările respective) ea trebuie să fie $x = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$. De aceea reprezentînd dependența $x = F(t^2)$ și aproximînd-o printr-o dreaptă, panta acesteia trebuie să fie egală cu $\frac{1}{2} g \sin \alpha$, în limitele erorilor experimentale.

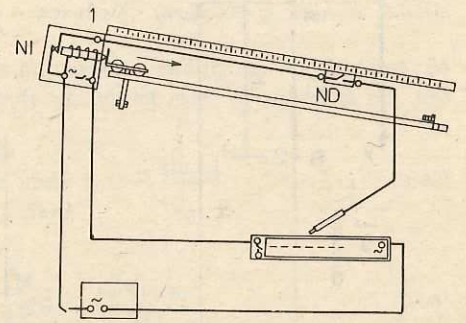


Fig. 3.18. Montajul electric pentru studiul mișcării pe planul înclinat.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 15$ m fără viteză inițială. În același timp este aruncat vertical în sus un al doilea corp cu viteză inițială $v_0 = 10$ m/s. După cît timp și la ce înălțime deasupra solului se întîlnesc corpurile?

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în sus cu originea în punctul de unde este aruncat corpul *2* (fig. 3.19). Atunci, ecuațiile mișcării sînt:

$$y_1 = h - \frac{1}{2} g t_m^2, \; y_2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Punem condiția de întîlnire $y_1 = y_2$ (în momentul întîlnirii distanța corpurilor pînă la originea O este aceeași):

$$y_1 = y_2, \; h - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

de unde

$$t_m = \frac{h}{v_0} = 1{,}5 \text{ s}; \; y_m = h - \frac{1}{2} g t_m^2 = 4{,}0 \text{ m}.$$

2. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale $v_{01} = 60$ m/s și $v_{02} = 40$ m/s, corpul *2* la un interval $\tau = 6{,}0$ s după primul. După cît timp și la ce înălțime deasupra solului se vor întîlni corpurile ? (Se va lua $g = 10$ m/s².)

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în sus. Atunci ecuațiile mișcării sînt:

$$y_1 = v_{01} t - \frac{1}{2} g t^2, \; y_2 = v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2} g (t - \tau)^2.$$

Punînd condiția de întîlnire $y_1 = y_2$, găsim

$$t_m = \frac{g\tau^2/2 + v_{02}\tau}{g\tau + v_{02} - v_{01}} = 10{,}5 \text{ s};$$

$$y_m = v_{01} t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 = 78{,}8 \text{ m}.$$

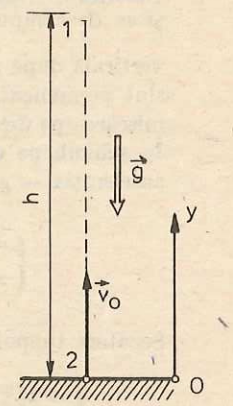


Fig. 3.19. La problema rezolvată 1.

3. Un corp cade liber (în vid) fără viteză inițială dintr-un punct A aflat la o înălțime $H = 4{,}9$ m. Simultan, dintr-un punct B situat cu $h = 2{,}0$ m mai jos de A, este aruncat vertical în sus un al doilea corp. Cu ce viteză inițială v_0 a fost aruncat acesta, dacă a ajuns pe Pămînt simultan cu primul?

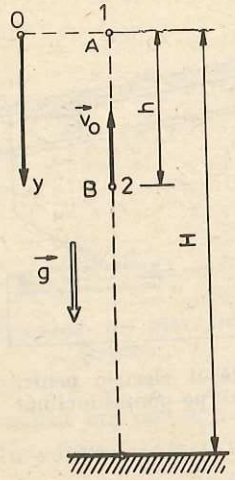


Fig. 3.20. La problema rezolvată 3.

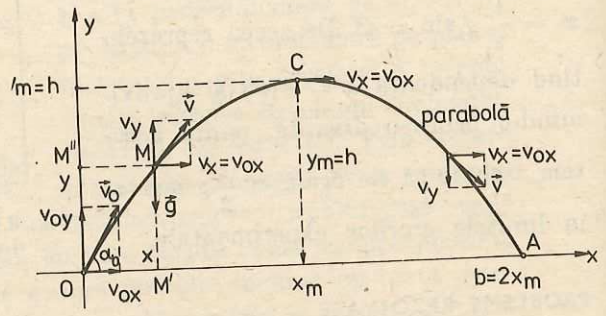


Fig. 3.21. Mișcarea în cîmp gravitațional terestru. (Problema rezolvată 4.)

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în jos, cu originea în punctul A (fig. 3.20). Atunci ecuațiile mișcării sînt:

$$y_1 = \frac{1}{2} gt^2,\ y_2 = h - v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

(componenta vitezei inițiale $\vec{v}_0$ pe axa aleasă este $-v_0$).
Condiția de întîlnire la suprafața pămîntului este:

$$y_1 = y_2 = H,\ \text{adică}\ \frac{1}{2} gt^2 = h - v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 = H,$$

de unde

$$t_m = h/v_0 \text{ și } v_0 = h\sqrt{\frac{g}{2H}} = 2{,}0 \text{ m/s}.$$

4.* Să se studieze aruncarea oblică a unui corp (în vid) cu o viteză inițială $\vec{v}_0$ care face un unghi α_0 cu orizontala.

Rezolvare. Mișcarea va avea loc în planul vertical conținînd forța $\vec{G} = m\vec{g}$ și viteza $\vec{v}_0$, și se descompune în două mișcări: în direcția orizontală după axa Ox și în direcția verticală după axa Oy (fig. 3.21). Deoarece forța $\vec{G} = m\vec{g}$ și accelerația respectivă $\vec{g}$ sînt permanent verticale, nu avem forță și accelerație pe direcția orizontală Ox, și mișcarea pe direcția orizontală va fi *uniformă* cu viteza constantă $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$. În schimb pe direcția verticală, după axa Oy, avem o mișcare *uniform variată* cu accelerația $-g$ și viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0, \\ x = v_0 t \cos \alpha_0, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha_0 - gt, \\ y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} gt^2. \end{cases} \tag{3.31}$$

Scoatem timpul din ecuația lui x: $t = x/v_0 \cos \alpha_0$, și îl introducem în ecuația lui y:

$$y = v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2. \tag{3.32}$$

Aceasta este ecuația explicită a traiectoriei — o *parabolă*, deoarece y este o funcție pătratică de x, de forma $y = Ax + Bx^2$.
Timpul de urcare pînă la înălțimea maximă se obține din condiția ca în punctul de înălțime maximă C: $v_y = 0$, deoarece aici vectorul viteză este orizontal și nu are componentă pe axa Oy:

$$v_y = 0 = v_0 \sin \alpha_0 - gt, \text{ de unde } t_u = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \tag{3.33}$$

și înălțimea maximă:

$$h = y_m = v_0 t_u \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t_u^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}, \tag{3.34}$$

adică obținem formulele cunoscute pentru timpul de urcare și înălțimea maximă de la aruncarea verticală (3.26), dar cu viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$.
În timpul de urcare t_u deplasarea pe orizontală va fi

$$x_m = v_0 t_u \cos \alpha_0 = \frac{1}{g} v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0. \tag{3.35}$$

Distanța maximă pe orizontală OA (fig. 3.21), numită *bătaia* (proiectilului) este $2x_m$:

$$b = 2x_m = \frac{1}{g} v_0^2\, 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha_0, \tag{3.36}$$

unde am folosit o formulă din trigonometrie: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.
Dacă se aruncă corpurile cu aceeași viteză inițială v_0 dar sub diferite unghiuri față de orizontală, bătaia maximă va fi sub unghiul α_m pentru care $\sin 2\alpha_m = 1$ în (3.36), deci $2\alpha_m = 90°$, de unde $\alpha_m = 45°$.

5.* Să se studieze aruncarea pe orizontală a unui corp (în vid).

Rezolvare. Alegem axele de coordonate ca în figura 3.22, unde h este înălțimea de la care se aruncă corpul. Se vede imediat că traiectoria coincide în acest caz cu jumătatea dreaptă a parabolei de la problema precedentă (dacă mutăm axa Oy astfel încît ea să treacă prin vîrful C). Asemănător problemei precedente avem

$$\begin{cases} v_x = v_0 = \text{const}, \\ x = v_0 t, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = -gt, \\ y = h - \frac{1}{2} gt^2. \end{cases} \tag{3.37}$$

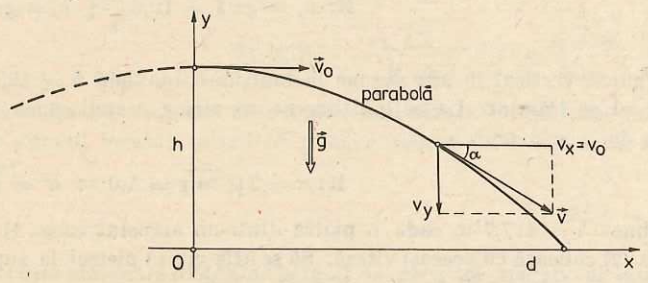


Fig. 3.22. Aruncarea orizontală a unui corp în cîmpul gravitațional terestru. (Problema rezolvată 5.)

Din aceste ecuații rezultă imediat: ecuația traiectoriei, timpul de coborîre (punem condiția $y = 0$), distanța parcursă pe orizontală și viteza finală v':

$$t = \frac{x}{v_0}; \quad y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} \quad \text{(parabolă)}; \tag{3.38}$$

$$y = 0; \; t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad d = v_0 t_c = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{3.39}$$

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v_0^2 + (-gt_c)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{3.40}$$

Observăm că ecuațiile (3.24) și (3.25) de la mișcarea pe verticală, cît și ecuațiile (3.31) de la aruncarea oblică sau (3.37) de la aruncarea orizontală se obțin imediat prin proiectarea pe cele două axe Ox, Oy a ecuațiilor *vectoriale* (3.17—3.18) (cu $\vec{a} = \vec{g}$):

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0); \; \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{g} (t - t_0)^2 \tag{3.41}$$

și ținînd seama, bineînțeles, că $\vec{g}$ are proiecția zero pe Ox.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 1{,}1$ km și parcurge astfel o distanță $h' = 314$ m, după care își continuă mișcarea uniform pînă la atingerea Pămîntului. Să se afle durata mișcării.

R: $t = \dfrac{h + h'}{\sqrt{2gh'}} = 18$ s.

2. Un corp aruncat vertical în sus are la înălțimea h_1 viteza v_1. Să se afle viteza inițială v_0.

R: $v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gh_1}$.

3. Considerînd că o săritură de la înălțimea $h \approx 1$ m pe Pămînt nu este periculoasă, să se calculeze înălțimea corespunzătoare pe Lună ($g = 1{,}62$ m/s²).

R: $h' = h\, g_P / g_L \approx 6$ m (2 etaje!).

4. Un corp aruncat vertical în sus a revenit pe pămînt după un timp $\tau = 4$ s. Să se afle viteza inițială a corpului și înălțimea la care s-a ridicat corpul.

R: $v_0 = g\tau/2 = 19{,}6 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$; $h = g\tau^2/8 = 19{,}6$ m.

5. Un corp aruncat vertical în sus ajunge la înălțimea maximă $h = 19{,}6$ m. După cît timp revine el pe Pămînt? La ce înălțime se va ridica corpul dacă viteza inițială este mărită de $n = 3$ ori?

R: $\tau = 2\sqrt{2h/g} = 4{,}0$ s; $h' = n^2 h = 176{,}4$ m.

6. De la înălțimea $h = 117{,}7$ m cade o piatră dintr-un aerostat care: 1) urcă cu viteza $v_0 = 9{,}8$ m/s; 2) coboară cu aceeași viteză. Să se afle viteza pietrei la suprafața Pămîntului și durata de cădere a pietrei în cele două cazuri.

R: $v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 49$ m/s; $t' = \dfrac{v' \pm v_0}{g} = 6{,}0$ și $4{,}0$ s.

7. Să se afle înălțimea h de la care cade liber un corp și durata T a mișcării sale știind că în intervalul de timp $\tau = 1{,}0$ s înainte de atingerea Pămîntului, el străbate o fracțiune $k = 0{,}19$ din înălțimea totală de la care cade.

R: $T = \tau \dfrac{1 + \sqrt{1 - k}}{k} = 10$ s; $h = \dfrac{1}{2} gT^2 = 490$ m.

8. De la înălțimea $h = 225$ m, pe o planetă oarecare, cad liber două corpuri unul după altul; al doilea începe să cadă în momentul cînd primul a parcurs $h' = 16$ m. Să se afle distanța dintre corpuri în momentul cînd primul corp a ajuns la suprafața planetei.

R: $d = 2\sqrt{hh'} - h' = 104$ m.

9. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu aceeași viteză inițială $v_0 = 19{,}6$ m/s și la un interval $\tau = 2{,}0$ s unul după altul. După cît timp ele se vor întîlni? Să se reprezinte grafic coordonatele în funcție de timp.

R: $T = v_0/g + \tau/2 = 3{,}0$ s.

10. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 10$ m. În același moment un alt corp este aruncat vertical în jos de la o înălțime $H = 20$ m. Să se afle viteza inițială a corpului 2, dacă ambele corpuri au căzut simultan pe pămînt.

R: $v_0 = \dfrac{H - h}{2h} \sqrt{2gh} = 7{,}0$ m/s.

11.* Cum se schimbă durata și distanța orizontală de cădere a unui corp aruncat orizontal, dacă viteza de aruncare crește de n ori?

R: nu se schimbă; crește de n ori.

12.* Un corp este aruncat orizontal cu viteza $v_0 = 10$ m/s. De la ce înălțime a fost aruncat, dacă această înălțime este egală cu distanța orizontală de cădere? ($g = 10$ m/s².)

R: $h = 2v_0^2/g = 20$ m.

13.* Un corp aruncat orizontal își mărește viteza de n ori după un timp τ de la începutul mișcării. Care este viteza inițială v_0 a corpului?

R: $v_0 = \dfrac{g\tau}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

14.* Un avion zboară orizontal la înălțimea h cu viteza constantă v_0. Aviatorul trebuie să arunce o bombă asupra unei ținte. Să se afle: unghiul β dintre raza vizuală spre țintă și verticală în momentul aruncării bombei, pentru ca ea să nimerească ținta; distanța d pe orizontală pînă la țintă în acel moment. Unde se va găsi avionul în momentul cînd bomba atinge ținta?

R: $\operatorname{tg} \beta = v_0 \sqrt{\dfrac{2}{gh}}$; $d = v_0 \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; deasupra țintei.

15.* Doi copii se joacă cu mingea aruncînd-o unul altuia. Ce înălțime maximă h atinge mingea în timpul jocului, știind că mingea zboară de la un copil la altul timp de $\tau = 2{,}0$ s?

R: $h = \dfrac{1}{8} g\tau^2 = 4{,}9$ m.

16*. De cîte ori este mai mare distanța (bătaia) la care un sportiv ar arunca o greutate pe Lună față de Pămînt? (Accelerația gravitațională pe Lună $g_L = 1{,}62$ m/s².)

R: $b_L : b_P = g_P : g_L \simeq 6$.

17.* Cu ce viteză inițială v_0 trebuie lansată o rachetă sub un unghi $\alpha = 45°$ față de orizontală, pentru ca să explodeze la înălțimea maximă a traiectoriei sale, știind că timpul de ardere a fitilului este $\tau = 6$ s?

R: $v_0 = \dfrac{g\tau}{\sin \alpha} = 82$ m/s.

18.* De pe puntea unui vapor care merge cu viteza constantă v_x se trage un obuz vertical în sus cu viteza v_y. Să se afle ecuația traiectoriei obuzului față de Pămînt. Unde va cădea obuzul?

R: $y = \dfrac{v_y}{v_x} x - \dfrac{g}{2v_x^2} x^2$; pe vapor.

19.* Un vînător ochește vîrful unui turn de înălțime $h = 20$ m. La ce distanță d de turn trebuie să tragă pentru ca glonțul care iese cu viteza inițială $v_0 = 250$ m/s să lovească baza turnului?

R: $d = \sqrt{h(2v_0^2/g - h)} = 505$ m.

20. Cu ce forță orizontală trebuie apăsat un corp de greutate $G = 10{,}0$ N, așezat pe un plan înclinat fără frecări, de unghi $\alpha = 60°$, pentru ca acest corp să nu lunece?

R: $F = G \operatorname{tg} \alpha = 17{,}3$ N.

21. Pe un plan înclinat neted, fără frecări, de unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală, este așezat un corp de masă $m = 2{,}0$ kg, legat printr-un fir de un alt corp de masă $M = 3{,}0$ kg.
Firul este întins paralel cu planul și trecut peste un scripete ideal din creștetul planului, ca în figura 3.23. Să se afle accelerația cu care se mișcă corpurile.

R: $T - Mg = Ma$; $mg \sin \alpha - T = ma$, $N - mg \cos \alpha = 0$,

de unde

$$a = g \frac{m \sin \alpha - M}{m + M} = -3{,}92 \text{ m/s}^2; \quad T = mMg \frac{1 + \sin \alpha}{m + M} = 176{,}4 \text{ N}.$$

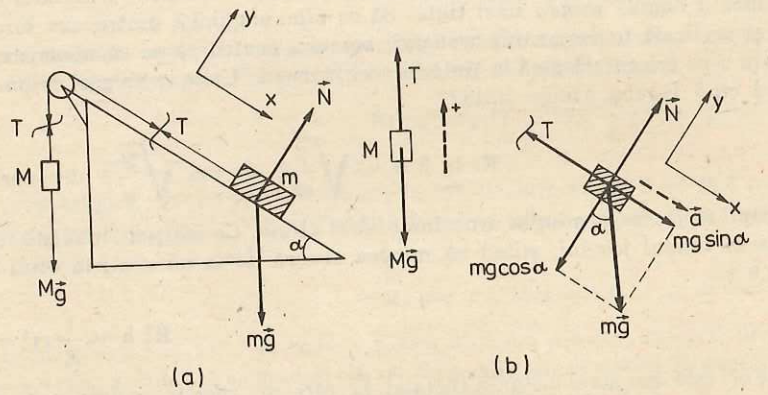


Fig. 3.23. La problema 21.

3.4.1. **Forțele de frecare la alunecare între solide.** Dacă lansăm un obiect cu o viteză inițială v_0 de-a lungul unui plan orizontal (pe o masă), el va avea o mișcare *încetinită* de lunecare și pînă la urmă se va opri. Cum se explică această mișcare încetinită? Deoarece viteza se micșorează, vectorul accelerație este opus vectorului viteză, deci și forța rezultantă trebuie să fie opusă vectorului viteză. Greutatea corpului este orientată vertical în jos și este anihilată (echilibrată) de reacțiunea normală a planului. Corpul nu are accelerație pe direcția verticală. Prin urmare trebuie să existe o forță *orizontală* de interacțiune între corp și plan. Aceasta este *forța de frecare*. Ea se datorește întrepătrunderii asperităților și neregularităților microscopice ale celor două suprafețe care lunecă una față de cealaltă. Prin urmare, mișcarea orizontală încetinită se datorește forței de frecare, exercitată de plan asupra corpului. Această *forță de frecare este conținută în planul lunecării* și este îndreptată în sens opus vitezei corpului (fig. 3.24). Desigur în planul de contact există două forțe de frecare, acțiunea și reacțiunea, egale în modul și de sensuri opuse, una acționează asupra corpului, iar cealaltă asupra planului.

Pentru a menține corpul în mișcare *uniformă* de alunecare trebuie să aplicăm o forță de tracțiune (sau de împingere) *egală* în modul și de sens opus cu forța de frecare, de exemplu, o sanie în mișcare uniformă trebuie trasă de cal.

Pentru a deplasa un obiect pe podea, de exemplu un dulap, un frigider, o masă, trebuie să împingem corpul cu o anumită forță *minimă*, necesară pentru a-l urni din loc, adică pentru a învinge înțepenirea (aderența) inițială de repaus. Dar, odată corpul pornit, este necesară o forță mai mică pentru a-l menține în mișcarea de alunecare pe podea. Dacă dulapul sau frigiderul este plin (încărcat) aceste forțe sînt mai mari, decît în cazul cînd dulapul sau frigiderul este gol.

Ori de cîte ori un corp *alunecă* peste alt corp, în planul de contact (planul alunecării), apar *forțe de frecare conținute în acest plan și orientate în sensul opus vitezei relative a corpului* considerat, față de celălalt corp. Forțele de frecare frînează totdeauna mișcarea relativă a corpurilor care alunecă.

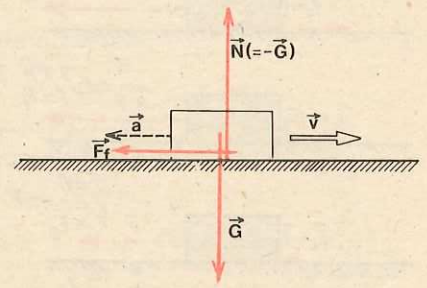


Fig. 3.24. Forța de frecare în cazul alunecării unui corp pe un plan orizontal.

3.4.2. **Legile frecării.** *Experiment.* Să punem pe o scîndură fixă o placă paralelipipedică dintr-un material oarecare (lemn, plastic, metal) prevăzută cu un cîrlig. Pe placă se pot pune diferite etaloane de masă, iar de cîrlig putem trage orizontal printr-un dinamometru

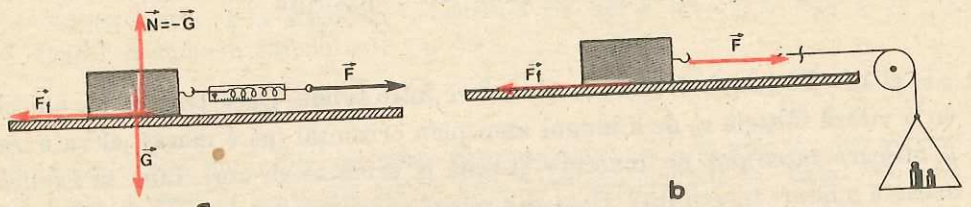


Fig. 3.25. Studiul legilor frecării la alunecare pe un plan orizontal.

sau putem lega un fir, întins orizontal și trecut peste un scripete. La capătul firului se leagă un platan pe care putem pune diferite etaloane de masă (fig. 3.25).

Dacă tragem încet de dinamometru sau adăugăm treptat etaloane de masă pe taler, constatăm că la început placa nu pornește. Cum greutatea plăcii este echilibrată de reacțiunea normală a scîndurii și în plus aceste forțe sînt verticale, ele nu pot echilibra forța de tracțiune exercitată de fir. Această forță de tracțiune este echilibrată de *forța de frecare* care ia naștere în planul de contact.

Prin urmare, *chiar înainte de a începe alunecarea apar forțe de frecare între solide*, numite *forțe de frecare statică* sau de *aderență*.

Dacă mărim treptat forța de tracțiune, fie trăgînd de dinamometru (fig. 3.25, *a*), fie adăugînd etaloane de masă pe platan (fig. 3.25, *b*), constatăm că la un moment dat, pentru o anumită forță de tracțiune F_s corpul pornește. Forța F_s este egală cu *forța maximă de frecare statică* (de aderență). Odată mișcarea începută, dacă menținem *aceeași* forță de tracțiune F_s, corpul se mișcă *accelerat*. Reducînd însă ulterior, convenabil, forța de tracțiune, este posibil să se obțină o mișcare *uniformă* a corpului (cu diferite viteze constante), pentru o *anumită* forță de tracțiune F_c mai mică decît F_s (fig. 3.26). Forța F_c este egală cu *forța de frecare la alunecare* (forță de frecare cinetică). (Cu F_f vom nota forța de frecare în general.)

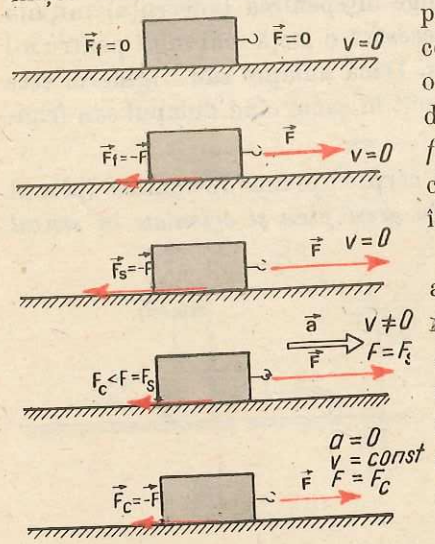


Fig. 3.26. Forțele de frecare statică (aderență) și forțele de frecare la alunecare (cinetice).

Pentru a măsura forța de frecare de alunecare F_c încărcăm treptat platanul cu mici etaloane de masă și de fiecare dată ciocănim ușor scîndura pentru a imprima mici impulsuri corpului. Cît timp forța de tracțiune (tensiunea din fir), egală cu greutatea platanului și a etaloanelor de masă, este mai mică decît forța de frecare la alunecare F_c, micile impulsuri imprimate corpului prin ciocănirea scîndurii *se sting* și corpul nu va aluneca pe scîndură. Dar în momentul

cînd forța de tracțiune atinge valoarea F_c, corpul *o dată pornit* (prin ciocănirea scîndurii) își va menține mișcarea de alunecare, practic *uniformă*, deoarece forța de tracțiune va fi echilibrată de forța de frecare la alunecare.

Aparatul cu ajutorul căruia se studiază legile frecării se numește *tribometru*. El este format dintr-o scîndură care poate fi fixată orizontal sau se poate înclina treptat și care are la un capăt un mic scripete ușor, cu frecări neglijabile. Aparatul mai are trei sau patru corpuri paralelipipedice identice (de obicei din lemn, dar avînd fixate pe fețele laterale plăci din alte materiale: plastic, metal, sticlă), prevăzute cu cîrlige pentru a putea fi cuplate între ele sau legate printr-un fir. Cu acest aparat se lucrează în două variante: ca plan orizontal (fig. 3.25, *b*) și ca plan înclinat (fig. 3.28). Vom studia mai jos numai forțele de frecare *la alunecare* F_c.

În prima variantă, ca în figura 3.25, măsurăm forța necesară pentru menținerea unei mișcări uniforme de alunecare, adică forța de frecare la *alunecare* F_c (prin ciocănirea ușoară a scîndurii).

Punînd corpul paralelipipedic pe diferite fețe (cu același material), constatăm experimental că forțele măsurate F_c sînt de fiecare dată *aceleași*, deși corpul se sprijină de fiecare dată cu suprafețe de *arie diferită*. Mai mult, punînd trei corpuri identice unul *peste* altul sau legîndu-le unul *după* altul (fig. 3.27), pe o față sau pe alta (cu același material), găsim iarăși aceeași forță de frecare F_c, deși aria suprafeței de contact s-a schimbat de fiecare dată, însă greutatea *sistemului* a fost aceeași. De aici deducem *prima lege a frecării:*

forța de frecare la alunecare F_c între două corpuri nu depinde de aria suprafeței de contact dintre corpuri.

Punînd peste corpul studiat diferite etaloane de masă, constatăm experimental că forțele de frecare cresc și anume:

forța de frecare la alunecare F_c este proporțională cu forța de apăsare normală exercitată pe suprafața de contact.

Notînd cu N forța normală de apăsare pe suprafața de contact dintre corpuri (în cazul experienței descrise N este egal cu greutatea corpului și a etaloanelor de masă puse peste corp) și cu μ coeficientul de proporționalitate putem scrie deci

$$F_c = \mu N. \tag{3.42}$$

Coeficientul μ se numește *coeficient de frecare la alunecare*.

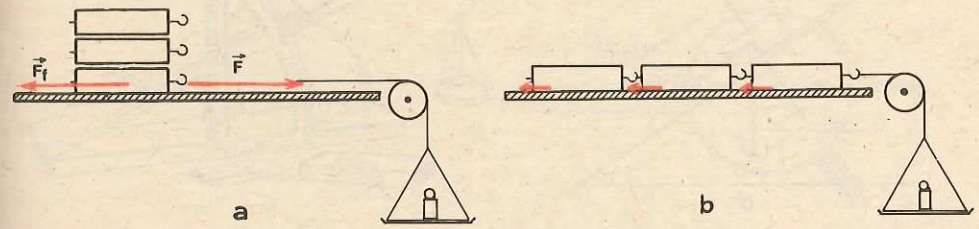


Fig. 3.27. Forța de frecare la alunecare nu depinde de aria suprafeței de contact dintre corpuri.

Repetînd experienţele descrise cu alte materiale, constatăm că într-adevăr coeficientul de frecare μ nu depinde de aria suprafeţei de contact dintre cele două corpuri (nelubrifiate), dar depinde de natura corpurilor şi de felul prelucrării suprafeţelor în contact (gradul de şlefuire sau contaminare cu oxizi sau alte substanţe).

De asemenea, experienţa arată că μ este practic independent de viteza relativă de alunecare a corpului (scade mai întîi puţin cu creşterea vitezei, ca apoi să crească iarăşi, puţin, cu viteza).

Aceleaşi legi ale frecării se obţin în varianta experimentală cu planul înclinat. Punem corpul pe scîndura tribometrului şi înclinăm (ridicînd) *treptat* scîndura pînă cînd la un moment dat, pentru un anumit unghi α de înclinare corpul porneşte. În acest moment componenta greutăţii G sin α învinge forţa maximă de frecare statică (de aderenţă) F_s (fig. 3.28). O dată corpul pornit, dacă nu micşorăm unghiul, corpul va aluneca în jos accelerat, deoarece forţa de frecare cinetică (de alunecare) F_c este mai mică decît ceă de frecare statică, $F_c < F_s$. Reluînd experienţa dar ciocănind uşor scîndura putem găsi un unghi φ (mai mic decît cel precedent) pentru care corpul o dată pornit va luneca în jos practic *uniform*. În acest caz $G\sin\varphi = F_c$.

Exact ca în experienţa cu scîndura orizontală, punînd corpul pe diferite feţe sau combinînd mai multe corpuri identice, găsim că unghiul φ, numit *unghi de frecare*, este de fiecare dată acelaşi, adică nu depinde de aria suprafeţei de contact (legea I). Punînd peste corp diferite etaloane de masă găsim că forţa F_c este proporţională cu apăsarea normală pe planul înclinat, care este G cos φ (legea II). Coeficientul de frecare rezultă imediat din această experienţă:

$$\mu = \frac{F_c}{N} = \frac{G \sin \varphi}{G \cos \varphi} = \text{tg } \varphi. \qquad (3.43)$$

Coeficientul de frecare la alunecare μ este egal cu tangenta unghiului de frecare φ, care la rîndul lui este egal cu unghiul planului înclinat pentru care corpul lunecă *uniform* pe plan.

Coeficientul de frecare, fiind un raport de forţe, este *adimensional* (număr fără dimensiuni fizice, adică fără unităţi de măsură).

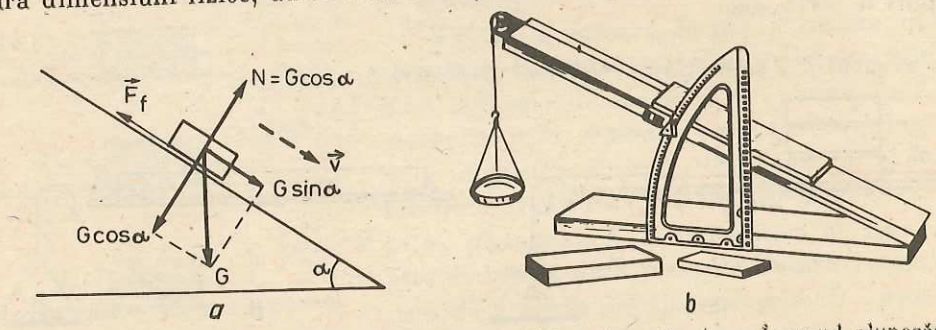


Fig. 3.28. Forţa de frecare pe planul înclinat. La echilibru $F_f = G \cdot \sin \alpha$. În cazul alunecării uniforme: $F_c = G \sin \varphi$ şi $F_c = \mu N = \mu G \cos \varphi$, de unde $\mu = \text{tg } \varphi$ (φ — unghiul de frecare).

Exemple de coeficienţi de frecare la alunecare

Piele pe metal	0,6	Piele pe fontă	0,28
Cărămidă pe cărămidă	0,5—0,7	Oţel pe oţel	0,17
Lemn pe lemn	0,2—0,6	Lemn pe gheaţă	0,035
Cauciuc pe şosea asfaltată	0,4—0,6	Oţel pe gheaţă	0,020
Piele pe lemn	0,40		

Cele două legi ale frecării au fost descoperite experimental de LEONARDO DA VINCI (1452—1519) şi redescoperite în 1699 de inginerul francez G. AMONTONS. Ulterior savantul francez CHARLES A. COULOMB (1736—1806) a efectuat multe experienţe asupra frecării şi a subliniat deosebirea dintre frecarea statică şi cea cinetică. În cinstea lui cele două legi îi poartă numele.

Explicaţia legilor frecării rezultă din analiza microscopică a suprafeţelor în contact. Oricît de şlefuite ar fi suprafeţele, ele prezintă nenumărate neregularităţi sau asperităţi microscopice. Atunci aria *reală* a contactului este mult mai mică decît aria aparentă macroscopică (poate fi de zece mii de ori mai mică) (fig. 3.29). Această arie reală de contact este proporţională cu apăsarea normală, deoarece vîrfurile neregularităţilor, dacă sînt supuse la o apăsare sporită, se deformează plastic (presiunea este foarte mare din cauza ariei mici) şi aria de contact creşte practic proporţional. În cazul alunecării aceste contacte-suduri dintre suprafeţe sînt rupte şi se formează continuu altele noi.

Prin urmare, forţa de frecare este în realitate proporţională cu aria reală a suprafeţelor microscopice de contact, care este independentă de aria aparentă macroscopică de contact, dar care este proporţională cu apăsarea normală. Rezultă că forţa de frecare este proporţională cu apăsarea normală, dar este independentă de aria aparentă macroscopică de contact.

3.4.3. **Frecarea în natură şi în tehnică.** Forţele de frecare la contactul dintre solide apar peste tot în natură şi în tehnică. În unele domenii ele sînt utile, chiar indispensabile, iar în alte domenii sînt dăunătoare şi trebuie reduse cît mai mult.

Astfel, echilibrul corpurilor pe suprafeţe uşor înclinate este posibil numai datorită forţelor de frecare. Însuşi mersul oamenilor este posibil datorită forţelor de frecare dintre talpa încălţămintei şi teren. La fel mersul vehiculelor este posibil datorită forţelor de frecare dintre periferia roţilor motoare (antre-

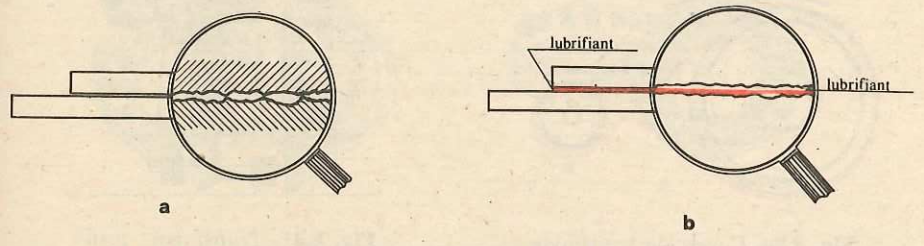


Fig. 3.29. Contactul microscopic între solide şi rolul lubrifiantului.

nate de motor) și teren. Pe gheață sau polei mersul este foarte greoi (la vehicule roțile patinează, adică se învîrtesc pe loc).

Trebuie observat că la roțile *motoare* (acționate de motor) ale vehiculelor, forța de frecare asupra roții este orientată *înainte* (roata împinge Pămîntul înapoi și Pămîntul împinge roata înainte, așa cum se vede clar în cazul patinării roții). Această *forță de frecare* reprezintă tocmai *forța de tracțiune* dezvoltată de motor. La fel în cazul mersului oamenilor forța de frecare asupra tălpii acționează *înainte:* noi împingem Pămîntul înapoi și Pămîntul ne împinge înainte.

Frînarea vehiculelor este posibilă tot datorită forțelor de frecare (între saboți și discul roții, între roți și șosea). Pentru o frînare eficientă a vehiculului nu trebuie să intrăm în regimul de alunecare a roților pe șosea, frînînd prea brusc pe teren lunecos sau blocînd roțile, ci să menținem rostogolirea roților în preajma alunecării, cînd forța de aderență este mai mare decît forța de frecare la alunecare.

Transmiterea mișcării de rotație prin curele de transmisie este posibilă datorită forțelor de frecare dintre curea și periferia roții (fig. 3.30 și fig. 3.31).

Legarea nodurilor la sforile pentru ambalarea mărfurilor; ținerea la mal a unui vas care acostează prin înfășurarea funiei de amaraj de mai multe ori în jurul bornei cilindrice fixate pe țărm; ținerea cu degetele mîini a diferitelor obiecte (creion, unelte) — toate sînt posibile numai datorită forțelor de frecare.

Pe de altă parte forțele de frecare sînt dăunătoare în diferite motoare și mecanisme, deoarece pentru învingerea lor se consumă energie în plus, în mod inutil, energie care se transformă în căldură, ducînd la încălzirea pieselor în mișcare. Uneori această încălzire poate duce la deformarea pieselor, la gripa-rea lor sau chiar la topirea lor.

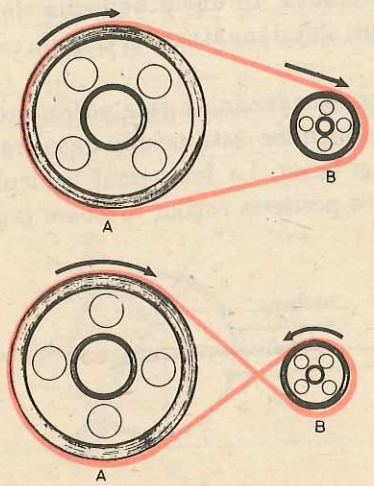


Fig. 3.30. Curele de transmisie.

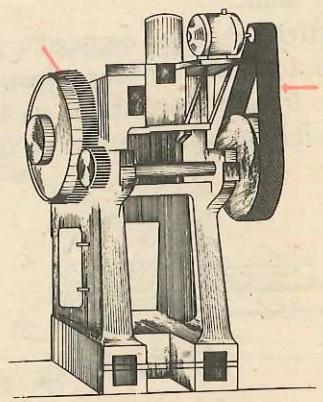


Fig. 3.31. Transmisie prin roți dințate și prin curea.

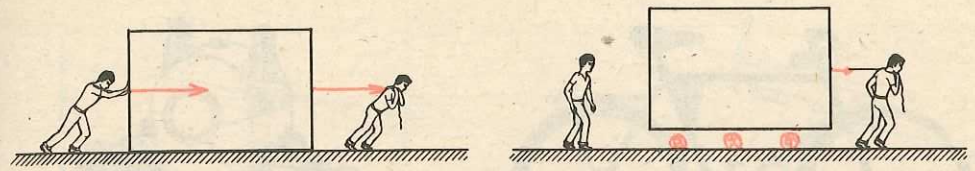


Fig. 3.32. Frecarea la alunecare și frecarea la rostogolire.

Pentru a micșora forțele de frecare la lunecare se folosesc *lubrifianți*: uleiuri și unsori. Acestea formează o peliculă care separă solidele și duce astfel la lunecarea pe o pătură de lichid, la care forțele de frecare sînt de zeci de ori mai mici.

O altă cale este folosirea *rostogolirii* în locul lunecării. Forța de frecare care se opune deplasării unui corp care se rostogolește peste altul este mult mai mică (de sute de ori) decît forța de frecare la alunecare. De exemplu, un cilindru (creion rotund) pus de-a lungul unui plan, înclinat ușor, rămîne în repaus, dar pus de-a curmezișul planului (pantei) sigur se va rostogoli, chiar la înclinări mici ale planului.

La rostogolire asperitățile sînt mai degrabă „netezite" sau „călcate", decît rupte ca în cazul lunecării.

Pentru a deplasa un bloc greu se pun sub el butuci de lemn (fig. 3.32)— procedeu cunoscut cu mult înaintea erei noastre, de exemplu în Egiptul antic, la construcția piramidelor.

Descoperirea roții a marcat un important progres al omenirii.

Pentru a reduce frecările în lagăre, în care se rotesc arbori sau osii, se folosesc *rulmenți* cu bile sau cu role (fig. 3.33, 3.34, 3.35) transformînd frecarea de alunecare din lagăre în frecarea de rostogolire a bilelor.

Forța de frecare la rostogolire se poate măsura în principiu la fel ca și forța de frecare la lunecare (cu tribometrul).

Astăzi există vehicule pe *pernă de aer* în care motoare speciale creează o pătură de aer sub vehicul, pe care acesta lunecă. De asemenea, se experimentează vehicule cu suspensie *magnetică* care se deplasează deasupra unor șine speciale, fiind menținute în suspensie cu ajutorul cîmpului magnetic.

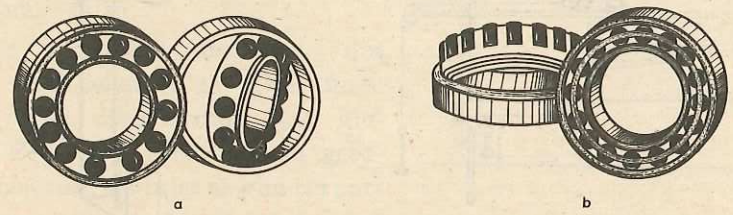


Fig. 3.33. a) Rulmenți cu bile și b) rulmenți cu role.

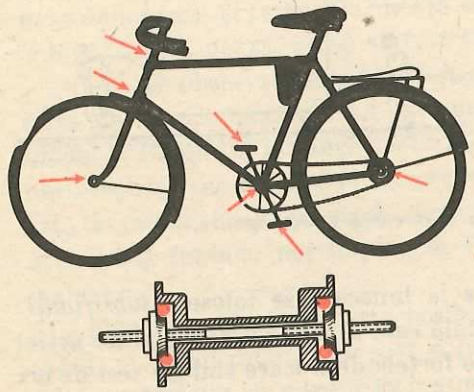


Fig. 3.34. Rulmenți cu bile la o bicicletă.

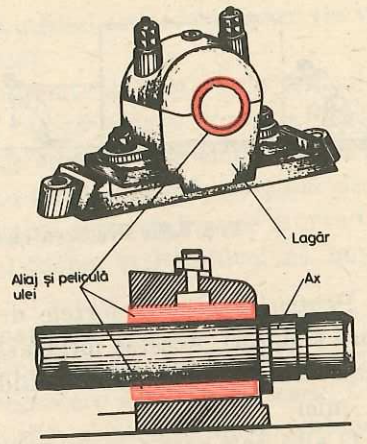


Fig. 3.35. Lagăr de alunecare (fără rulmenți).

În afară de frecarea între solide, există forțe de frecare între solide și fluide sau între straturi de fluid. Astfel, orice corp care se mișcă într-un fluid întîmpină din partea acestuia o forță de rezistență, de exemplu la vapoare, submarine, vehicule terestre, avioane, rachete.

EXPERIMENTE

Studiul frecării la alunecare. (Trusă de fizică pentru liceu.) Se analizează frecarea de alunecare dintre cărucior (cu roțile blocate) și bara de rulare. Pentru aceasta se realizează montajul din figura 3.36 (detalii în fig. 1.29). Se blochează roțile căruciorului (fig. 3.37) pentru a realiza frecarea de alunecare.

a) Metoda planului orizontal. Se încarcă căruciorul cu greutăți cu șurub de 100 g. Forța de tracțiune se alege prin încercări astfel încît căruciorul cu roțile blocate să lunece *uniform* după ce a fost pus în mișcare. Atunci forța de tracțiune F echilibrează forța de frecare la lunecare F_c și $\mu = F_c/N = F/G$.

Se fac mai multe determinări pentru încărcări diferite ale căruciorului și se calculează μ. În limitele erorilor experimentale se obține același coeficient μ.

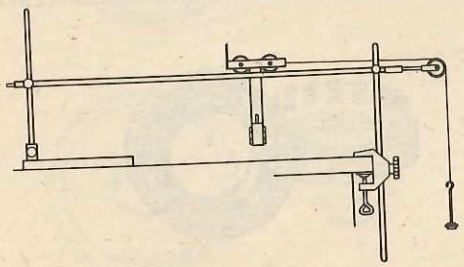


Fig. 3.36. Montaj pentru studiul frecării pe plan orizontal.

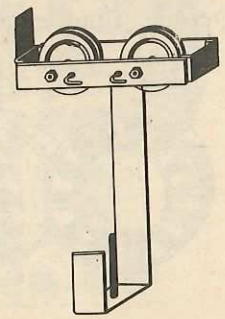


Fig. 3.37. Blocarea roților căruciorului.

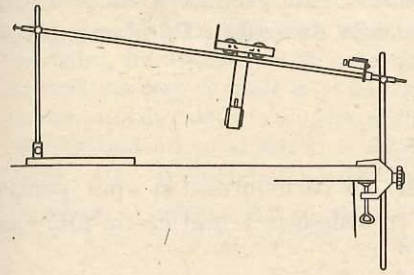


Fig. 3.38. Montaj pentru studiul frecării pe plan înclinat.

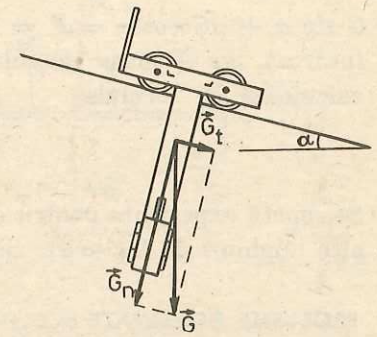


Fig. 3.39. Componentele forței de greutate (la căruciorul încărcat).

b) Metoda planului înclinat. Se utilizează planul înclinat fără montajul electric (fig. 3.38). Pe acesta se lasă să lunece căruciorul cu roțile blocate. Forța care pune în mișcare căruciorul este componenta tangențială a greutății acestuia (fig. 3.39). În mișcare *uniformă*, cu unghiul φ al planului, forța de frecare $F_c = \mu N = \mu G_n = \mu mg \cos \varphi$ este echilibrată de componenta tangențială $G_t = mg \sin \varphi$ astfel încît $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ (φ — unghiul de frecare).

Se lasă căruciorul să lunece pe bara de rulare și se modifică unghiul de înclinare α al acesteia pînă se obține o mișcare *uniformă* în urma unui impuls. Se măsoară unghiul φ cu raportorul (*17*). Se repetă experiența de cîteva ori și se ia media valorilor μ. Se va compara cu valoarea obținută în varianta precedentă.

2. *Determinarea randamentului planului înclinat.* Pentru a ridica *uniform* un corp pe un plan înclinat de lungime l și înălțime h, fără frecări, trebuie să efectuăm lucrul mecanic $L_u = G \sin \alpha \cdot l = Gh$, la fel ca pentru ridicarea directă pe verticală. În prezența frecărilor: $L_t = (G \sin \alpha + \mu G \cos \alpha) \cdot l > L_u$ deci ridicarea corpului se face cu randamentul

$$\eta = \frac{L_u}{L_t} = \frac{mgh}{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)l} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \mu/\operatorname{tg} \alpha} < 1.$$

Cu cît unghiul α este mai mare (deci tg α mai mare), cu atît η este mai mare, dar și forța necesară este mai mare. La unghiuri α mici randamentul este mai mic dar în schimb și forța necesară este mai mică.

Se realizează montajul din figura 3.40 montat ca plan înclinat (roțile căruciorului sînt blocate). Se încarcă căruciorul cu greutăți cu șurub. Pe taler se pun corpuri cu mase cunoscute M pînă cînd căruciorul se deplasează *uniform în sus* în urma unui impuls. Atunci

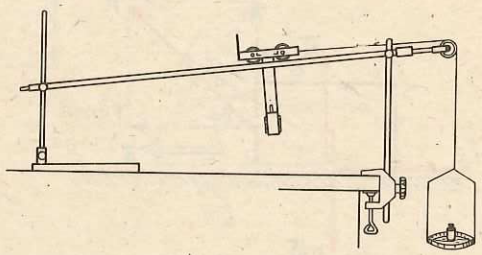


Fig. 3. 40. Montaj pentru determinarea randamentului unui plan înclinat.

$G \sin \alpha + \mu G \cos \alpha = F = (m_t + M)g$, unde G este greutatea căruciorului încărcat, m_t — masa talerului, M — etaloanele de masă. Randamentul se calculează cu formula:

$$\eta = \frac{Gh}{Fl} = \frac{m \sin \alpha}{m_t + M}.$$

Se repetă experiența pentru diferite încărcări ale căruciorului și apoi pentru alte unghiuri de înclinare. Se va compara cu valoarea teoretică de mai sus.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp este lansat de-a lungul unui plan orizontal cu viteza inițială $v_0 = 4{,}9$ m/s. Coeficientul de frecare la alunecare între corp și plan este $\mu = 0{,}20$. Să se afle accelerația corpului, timpul pînă la oprire și distanța parcursă.

Rezolvare. Conform figurii 3.41 avem $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{ma}$, care proiectată pe cele două axe dă ecuațiile pe componente:

$$-F_f = ma, \quad N - G = 0,$$

dar, deoarece are loc alunecarea, $F_f = F_c = \mu N = \mu G = \mu mg$, atunci

$$-\mu mg = ma, \quad a = -\mu g.$$

Semnul minus arată că accelerația este îndreptată în sensul opus vitezei (mișcare încetinită). Aplicînd formulele cunoscute pentru timpul pînă la oprire și distanța parcursă pînă la oprire într-o mișcare încetinită, obținem:

$$t_m = -\frac{v_0}{a} = -\frac{v_0}{-\mu g} = \frac{v_0}{\mu g} = 2{,}5 \text{ s}; \quad x_m = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{-2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 6{,}1 \text{ m}.$$

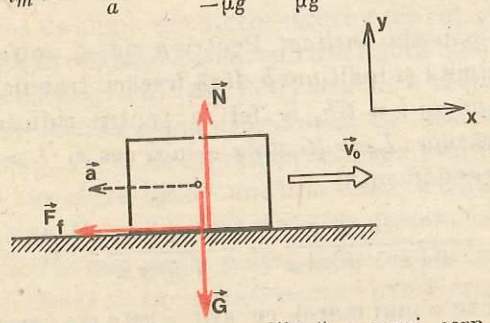


Fig. 3.41. Alunecarea liberă a unui corp pe un plan orizontal cu frecare.

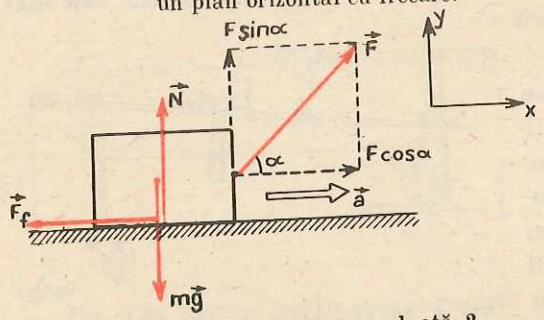


Fig. 3.42. La problema rezolvată 2.

2. Un corp de masă $m = 10{,}0$ kg, așezat pe un plan orizontal, este tras de o forță care formează un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala (fig. 3.42). Să se afle această forță, știind că corpul se mișcă orizontal cu accelerația $a = 1{,}34$ m/s² și coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0{,}27$.

Rezolvare. Conform figurii 3.42 avem $\vec{F} + \vec{mg} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{ma}$, care proiectată pe cele două axe dă ecuațiile:

$$F \cos \alpha - F_f = ma; \; F \sin \alpha + N - mg = 0; \text{ dar } F_f = F_c = \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha),$$

de unde:

$$F = \frac{m(a + \mu g)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 40 \text{ N}.$$

Aici se greșește uneori punînd $F_f = \mu mg$.

3. Un corp de masă $M = 4{,}0$ kg este așezat pe un plan orizontal. De corp este legat un fir întins orizontal, trecut peste un scripete ideal și având la capăt un corp de masă $m = 3{,}0$ kg (fig. 3.43). Coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul M și planul orizontal este $\mu = 0{,}25$. Să se afle accelerația sistemului și tensiunea din fir.

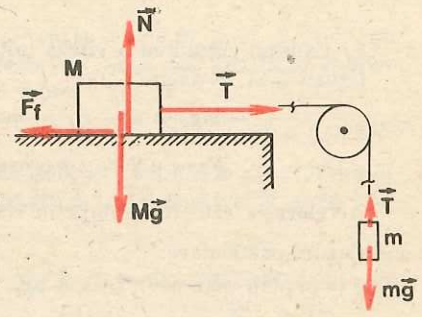


Fig. 3.43. La problema rezolvată 3.

Rezolvare. Conform figurii 3.43 avem:

pentru corpul M: $T - F_f = Ma$,
$N - Mg = 0$;

pentru corpul m: $mg - T = ma$.

Dar în cazul lunecării $F_f = F_c = \mu N = \mu Mg$. Rezolvînd atunci sistemul de ecuații, obținem:

$$a = g\frac{m - \mu M}{m + M} = 2{,}8 \text{ m/s}^2, \quad T = \frac{(1 + \mu)mMg}{m + M} = 21 \text{ N}.$$

4. Să se studieze lunecarea liberă a unui corp pe un plan înclinat *cu frecare*.

Rezolvare. a) *Corpul lunecă liber în jos* (fără viteză inițială). Conform figurii 3.44, *a* avem:

$$mg \sin \alpha - F_f = ma, \qquad N - mg \cos \alpha = 0,$$

dar în cazul lunecării $F_f = F_c = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, atunci

$$mg \sin \alpha - \mu \, mg \cos \alpha = ma, \qquad a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \tag{3.44}$$

Pentru ca corpul *să lunece* trebuie ca:

$$a > 0, \; \sin \alpha > \mu \cos \alpha \text{ sau } \mu < \operatorname{tg} \alpha \tag{3.45}$$

altfel corpul rămîne în repaus pe planul înclinat.

Cazuri particulare:

$\alpha = 0$, plan orizontal, $a = -\mu g$, adică rezultatul cunoscut de la problema rezolvată 1;

$\alpha = 90°$, căderea liberă, $a = g$ (rezultat bine cunoscut).

Cunoscînd accelerația la coborîre a_c (3.44), putem calcula timpul de coborîre și viteza finală:

$$t_c = \sqrt{\frac{2s}{a_c}} = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}; \quad v' = \sqrt{2a_c s} = \sqrt{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)s}. \tag{3.46}$$

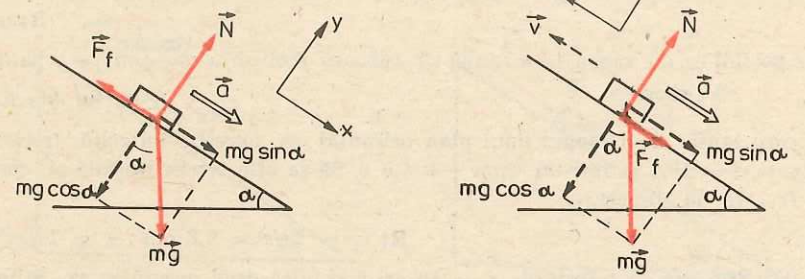


Fig. 3.44. Mișcarea pe plan înclinat cu frecare. La problema rezolvată 4.

b) Lansăm corpul cu o viteză inițială v_0 în sus de-a lungul planului înclinat. Conform figurii 3.44, *b* avem:

$$-mg\sin\alpha - F_f = ma, \qquad N - mg\cos\alpha = 0,$$
$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha, \qquad a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \tag{3.47}$$

Accelerația este îndreptată în sensul opus vitezei (mișcare încetinită).

Cazuri particulare:

$\alpha = 0$, plan orizontal, $a = -\mu g$, rezultat cunoscut;

$\alpha = 90°$, aruncare vertical în sus, $a = -g$, iarăși rezultat cunoscut.

Cunoscînd accelerația de urcare (3.47), putem calcula timpul de urcare și distanța parcursă:

$$t_u = -\frac{v_0}{a_u} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}; \quad s_m = -\frac{v_0^2}{2a_u} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{3.48}$$

După oprire, corpul rămîne în repaus, blocat pe planul înclinat dacă $\mu > \mathrm{tg}\alpha$, și lunecă înapoi dacă $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$ (3.45). În ultimul caz, timpul de coborîre înapoi la baza planului este mai mare decît timpul de urcare, și viteza finală v' cu care corpul ajunge înapoi la baza planului este mai mică decît viteza de lansare v_0:

$$t_c = \sqrt{\frac{2s_m}{a_c}} = \frac{v_0}{g}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}} = t_u\sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} =$$
$$= t_u\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mu}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu}} > t_u; \tag{3.49}$$

$$v' = \sqrt{2a_c s_m} = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} = v_0\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mu}} < v_0. \tag{3.50}$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. De ce locomotivele se fac grele din oțel și nu ușoare din aluminiu (sau duraluminiu)?

R: forța de tracțiune este forța de frecare la roțile motoare ($F_{f.max} = \mu G$).

2. Care este condiția ca un corp, lansat în sus de-a lungul unui plan înclinat să rămînă pe loc după oprire?

R: $\mu > \mathrm{tg}\,\alpha$.

3. Este posibil ca un vagon (sau sanie) să coboare rectiliniu *uniform* pe o pantă lină?

R: da (dacă $\alpha = \varphi$).

4. Un corp lansat de-a lungul unui plan orizontal se oprește datorită frecării pe o distanță $d = 19{,}6$ m într-un timp $\tau = 4{,}0$ s. Să se afle viteza inițială și coeficientul de fr re la lunecare.

R: $v_0 = 2d/\tau = 9{,}8$ m/s; $\mu = 2d/g\tau^2 = 0{,}25$.

5. Un tren frînează cu o forță de $n = 10$ ori mai mică decît greutatea sa. Știind viteza inițială $v_0 = 108$ km/h, să se afle timpul pînă la oprire și distanța parcursă.

R: $t_m = nv_0/g = 31$ s; $d = nv_0^2/2g = 460$ m.

6. Un camion cu masa $m = 5{,}0$ t pornește cu accelerația $a = 0{,}61$ m/s². Știind că forțele de frecare (rezistență) reprezintă o fracțiune $f = 0{,}040$ din greutatea camionului, să se afle forța de tracțiune dezvoltată de motor.

R: $F = m(fg + a) = 5{,}0$ kN.

7. Un tren cu masa $m = 1\,000$ t își mărește viteza de la $v_1 = 54$ km/h la $v_2 = 72$ km/h într-un timp $\Delta t = 1$ min 40 s. Știind forța de tracțiune a locomotivei $F = 80$ kN, să se afle forța de rezistență.

R: $F_r = F - m\dfrac{v_2 - v_1}{\Delta t} = 30$ kN.

8. Pentru a evita o ciocnire un șofer a frînat brusc, la maximum. Măsurînd lungimea urmelor lăsate de anvelope pe asfalt s-a găsit lungimea de frînare $s = 22$ m. Știind coeficientul de frecare pe asfalt $\mu = 0{,}60$, să se afle dacă șoferul a respectat viteza maximă legală $v_{max} = 60$ km/h.

R: $v_0 = \sqrt{2\mu gs} = 16{,}1$ m/s $= 58$ km/h.

9. Un corp cade liber în aer de la o înălțime $h = 14{,}7$ m într-un timp $t_c = 2{,}0$ s. Ce fracțiune din greutatea sa reprezintă forța de rezistență *medie* întîmpinată de corp din partea aerului?

R: $F_r/mg = 1 - 2h/gt_c^2 = 0{,}25$.

10. Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ trebuie aplicată o forță minimă în sus de-a lungul planului $F_1 = 3{,}5$ N, iar pentru a-l trage uniform în sus de-a lungul planului trebuie o forță în sus de-a lungul planului $F_2 = 6{,}5$ N.

Să se afle coeficientul de frecare la lunecare (fig. 3.45).

R: $\mu = \dfrac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1}\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}17$.

11. O săniuță lunecă pe zăpadă pe un drum înclinat de unghi $\alpha = 45°$ de la o înălțime $h = 2{,}0$ m, după care intră pe un drum orizontal, oprindu-se pînă la urmă datorită frecării pe zăpadă. Coeficientul de frecare la lunecare pe zăpadă $\mu = 0{,}050$. Să se afle distanța parcursă pe planul orizontal.

R: $d = h(1/\mu - \mathrm{ctg}\,\alpha) = 38$ m.

12. O săniuță lansată în sus de-a lungul unui plan înclinat, care formează unghiul $\alpha = 45°$ cu orizontala, revine înapoi la baza planului astfel încît timpul de coborîre este de $n = 1{,}1$ ori mai mare decît timpul de urcare. Care este coeficientul de frecare la lunecare între săniuță și planul înclinat?

R: $\mu = \mathrm{tg}\alpha(n^2 - 1)/(n^2 + 1) = 0{,}095$.

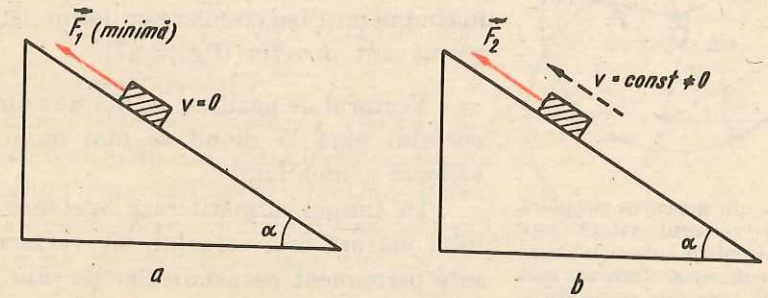


Fig. 3.45. La problema 10.

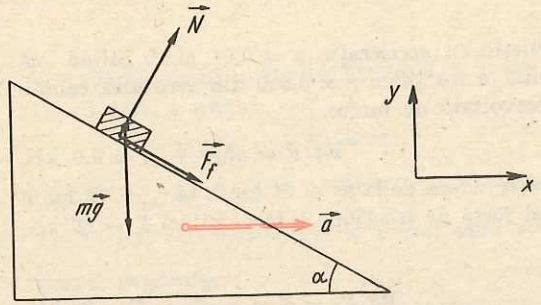


Fig. 3.46. La problema 14.

13. O săniuță de greutate $G = 0{,}50$ kN lunecă liber în jos pe o pantă $p = 4\%$ cu viteză *constantă*. Ce forță, paralelă cu planul, este necesară pentru a urca săniuța înapoi cu viteză constantă?

R: $F \simeq 2Gp = 40$ N.

14. Cu ce accelerație orizontală minimă trebuie împins un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ pentru ca un corp așezat pe el să înceapă să urce pe plan. Coeficientul de frecare dintre corp și planul înclinat este $\mu = 0{,}20$ (fig. 3.46).

R: $N \sin \alpha + F_f \cos \alpha = ma$, $N \cos \alpha - mg - F_f \sin \alpha = 0$,

$F_f = \mu N$, de unde $a = g \dfrac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{3}{2} g$.

3.5. MIȘCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ

Cea mai simplă și una din cele mai răspîndite și mai importante mișcări curbilinii este *mișcarea circulară*. În mișcarea circulară traiectoria punctului material este un *cerc*.

În structura diferitelor mecanisme, motoare, mașini-unelte intră tot felul de roți și osii ale căror particule descriu cercuri în jurul axei de rotație, deci au o mișcare circulară.

Să legăm o piatră de o sfoară și s-o învîrtim deasupra capului astfel încît să descrie un cerc orizontal. Piatra va avea o mișcare circulară.

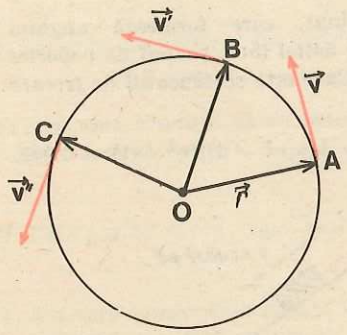


Fig. 3.47. În mișcarea circulară uniformă vectorul viteză este constant în modul, dar își schimbă mereu *direcția*, deoarece este tangent la cerc sau perpendicular pe raza vectoare a mobilului.

Mișcarea circulară este *uniformă* dacă viteza mobilului este *constantă în modul*, adică mobilul descrie arce de cerc egale în intervale de timp egale.

Vectorul viteză, fiind totdeauna tangent la traiectorie, deși rămîne constant în modul în timpul mișcării circulare uniforme, își schimbă permanent *direcția* (fig. 3.47).

Vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ dus din centrul cercului pînă la mobil se mai numește *raza vectoare* a mobilului.

În timpul mișcării raza vectoare a mobilului mătură aria cercului, iar vectorul viteză este permanent perpendicular pe raza vectoare a mobilului (fig. 3.47).

Mișcarea circulară uniformă este o mișcare *periodică* deoarece se repetă identic după parcurgerea întregului cerc, la intervale egale de timp.

Perioada mișcării circulare uniforme este intervalul de timp în care mobilul parcurge circumferința cercului.

Perioada T se măsoară în secunde.

O caracteristică a mișcării circulare uniforme, folosită mai des în practică, este *turația* sau *frecvența de rotație care reprezintă numărul de rotații efectuate în unitatea de timp* (1 s).

Dacă înmulțim durata unei rotații, adică perioada T, cu numărul rotațiilor efectuate în unitatea de timp, adică cu frecvența ν, trebuie să obținem unitatea de timp: $T\nu = 1$, de unde rezultă că frecvența și perioada sînt inverse între ele sau reciproce:

$$T\nu = 1, \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{1}{\nu}. \tag{3.51}$$

Frecvența se măsoară în 1/s sau s^{-1}. În practică turația (notată de obicei cu n) se măsoară adesea în rot/min (1 rot/s = 60 rot/min).

3.5.1. **Viteza unghiulară.** Poziția mobilului pe cerc poate fi determinată cu ajutorul coordonatei curbilinii care măsoară lungimea arcului de cerc de la un punct-origine O, considerată pozitivă în sensul trigonometric (antiorar).

Fie la momentul inițial $t = t_0$ mobilul în $A_0(s_0)$ și la momentul t mobilul în $A(s)$ (fig. 3.48), atunci mișcarea fiind uniformă pe traiectorie, avem analog mișcării rectilinii uniforme:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \text{const}, \text{ de unde } s = s_0 + v(t - t_0) \tag{3.52}$$

(v va fi negativă în cazul mișcării în sens orar).

Fie θ_0 și θ unghiurile la centru pe care le formează raza vectoare a mobilului cu raza de referință CO ($\theta = 0$) la momentele t_0 și t. Unghiul la centru $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, *măsurat în radiani*, descris de raza vectoare în timpul $\Delta t = t - t_0$ este legat de arcul subîntins $\Delta s = s - s_0$ prin relația cunoscută din trigonometrie:

$$\Delta s = s - s_0 = R\Delta\theta = R(\theta - \theta_0), \tag{3.53}$$

unde R este raza cercului.

Radianul este un unghi la centru care subîntinde un arc de cerc egal cu raza cercului. Cum unghiul total de 360° subîntinde toată lungimea cercului care cuprinde 2π raze, rezultă că unghiul de 360° are 2π radiani, deci

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = 57°17'44'',8. \tag{3.54}$$

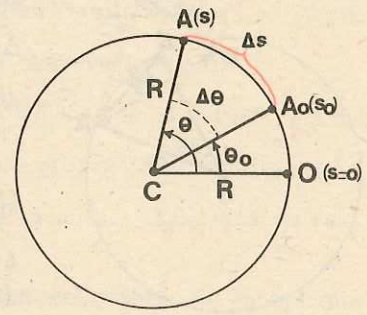


Fig. 3.48. În mișcarea circulară uniformă: $s = s_0 + v(t - t_0)$ și $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$ (legea mișcării).

În fiecare secundă mobilul descrie arce egale, deci și unghiuri la centru egale. O caracteristică unghiulară a mișcării circulare este viteza unghiulară.

Viteza unghiulară reprezintă unghiul la centru descris de raza vectoare în unitatea de timp.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad [\omega] = 1 \text{ rad/s}. \tag{3.55}$$

Viteza unghiulară se măsoară în *radiani pe secundă* (rad/s).

În mișcarea circulară uniformă $\omega = \text{const}$. Într-o mișcare circulară oarecare (neuniformă) unghiul la centru măturat de raza vectoare, raportat la unitatea de timp, adică viteza unghiulară (momentană), nu este constant, ci variază în timp.

Vom studia numai mișcarea circulară *uniformă*. Din (3.55) rezultă

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}, \quad \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0). \tag{3.56}$$

Aceasta este legea mișcării circulare *uniforme* exprimată prin mărimi unghiulare (ω va fi negativ dacă mobilul se mișcă în sens orar).

Împărțind relația (3.53) la Δt, avem

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega \rightarrow v = R\omega. \tag{3.57}$$

Aceasta este legătura dintre viteza v (numită și viteză liniară) și viteza unghiulară ω.

În timpul unei perioade T mobilul descrie circumferința cu viteza constantă v, deci

$$vT = 2\pi R, \text{ dar } v = \omega R, \text{ de unde } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{3.58}$$

Aceasta este legătura dintre viteza unghiulară ω (în rad/s) și perioada T (în s) sau frecvența ν (în 1/s).

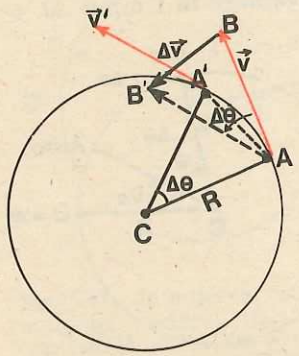


Fig. 3.49. Calculul accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă.

3.5.2. **Accelerația centripetă.** În mișcarea circulară uniformă $|\vec{v}| = \text{const}$. sau $\Delta v \equiv 0$, dar $\Delta\vec{v} \neq 0$, deoarece *vectorul viteză* $\vec{v}$ *variază ca direcție* și deci *există o accelerație* $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Să calculăm această accelerație.

Să considerăm mobilul la două momente succesive t și $t' = t + \Delta t$ în punctele A, A' având vitezele $\vec{v}$, respectiv $\vec{v}'$, unde $|\vec{v}'| = |\vec{v}|$ (fig. 3.49).

Diferența $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ se obține după cum știm unind vîrfurile vectorilor $\vec{v}'$, $\vec{v}$ duși din *același*

punct, de exemplu din A. Triunghiul vitezelor ABB' este asemenea cu triunghiul CAA', ele fiind isoscele și avînd laturile respectiv perpendiculare. Din asemănarea acestora avem

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{AA'} = \frac{v}{R}.$$

Pentru intervale de timp Δt foarte mici punctele A, A' sînt foarte apropiate și coarda AA' coincide (la limită) cu arcul Δs. Atunci

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta s} = \frac{v}{R}, \quad |\Delta\vec{v}| = \frac{v}{R}\Delta s,$$

(pentru Δt și $\Delta s \rightarrow 0$).

Împărțind la Δt corespunzător, rezultă

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Direcția și sensul accelerației sînt date de segmentul BB' care este perpendicular pe AA'. Cînd Δt descrește către zero ($\Delta t \rightarrow 0$) și A' se apropie de A, coarda ia direcția tangentei la cerc în A, iar BB' ia direcția razei cercului. Prin urmare, accelerația este *radială, orientată spre centrul cercului*, de aceea se numește accelerație *centripetă*. Ea este *perpendiculară* permanent pe *traiectorie* (pe tangenta la cerc sau pe vectorul viteză), de aceea se numește și accelerație *normală:*

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R = 4\pi^2\frac{R}{T^2}; \tag{3.59}$$

unde am ținut seama că $v = \omega R$ și $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$. Relația (3.59) se poate scrie și vectorial, folosind raza vectoare $\vec{r}$:

$$\vec{a}_n = -\omega^2\vec{r}. \tag{3.60}$$

Această relație *vectorială* ne dă accelerația centripetă atît ca mărime, cît și ca direcție și sens. Observăm că în mișcarea circulară uniformă $|\vec{a}| = \text{const}$, dar $\vec{a}_n$ variază permanent *ca direcție* (o dată cu raza vectoare $\vec{r}$).

Dacă mișcarea circulară nu este uniformă, adică $|\vec{v}|$ și ω variază, atunci în variația $\Delta\vec{v}$ apare și un termen suplimentar care provine din variația *modulului* vitezei și atunci vectorul accelerație $\vec{a}$ este orientat *oblic* față de raza vectoare (variind ca modul și direcție).

3.5.3. **Forța centripetă.** Pentru a schimba vectorul viteză, fie ca mărime fie ca direcție, este nevoie de o forță aplicată corpului. Altfel, corpul s-ar mișca rectiliniu uniform, conform principiului inerției. În mișcarea circulară *uniformă* accelerația este centripetă (3.59–3.60) și conform legii fundamentale

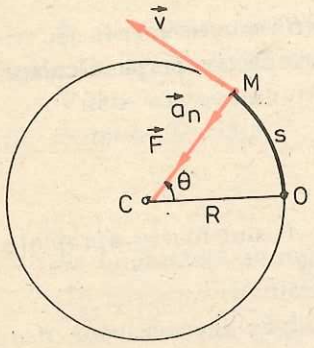


Fig. 3.50. Elementele mișcării circulare uniforme.

$\vec{F} = m\vec{a}$, asupra corpului trebuie să acționeze o *forță centripetă*, care să-determine mișcarea *circulară uniformă* (fig. 3.50):

$$F = ma_n = m\omega^2 R = m\omega v = m\frac{v^2}{R},$$

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}. \qquad (3.61)$$

Forța centripetă nu este un nou tip de forță. Ea poate fi forță elastică de tensiune a unui fir legat de corp, forță gravitațională exercitată de corpul central (de exemplu, în sistemul solar), forță electrică exercitată de nucleul atomului asupra electronilor etc.

EXPERIMENT

Descrierea dispozitivului. Pentru a verifica expresia forței centripete (3.61) putem face un experiment simplu. Luăm un tub de sticlă de diametru ≈ 1 cm și de lungime ≈ 10 cm cu marginile răsfrînte la un capăt și un fir de ≈ 80 cm. La un capăt al firului legăm un dop de masă bine cîntărită ($m \approx 2{,}0$ g) iar la celălalt capăt legăm un etalon de masă ($M \approx 20$ g) sau un dinamometru cu un capăt prins de masă (fig. 3.51).

Modul de lucru. 1. Aducem corpul m în mișcare circulară uniformă pe un cerc orizontal. Firul va fi întins de forța $F = Mg$ în varianta din figura 3.51, *a* sau de forța F indicată de dinamometru în varianta din figura 3.51, *b* și va avea o poziție practic orizontală, deci forța centripetă va fi practic chiar F (altfel trebuie calculată componenta orizontală a tensiunii din fir).

2. Alegem trei valori pentru raza R (20 cm; 40 cm și 60 cm) și măsurăm perioada respectivă (cronometrăm timpul a 10—20 rotații).

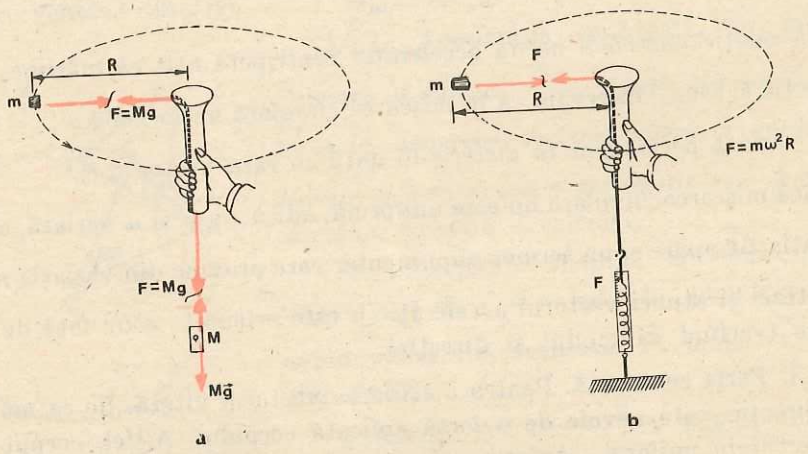


Fig. 3.51. Forța centripetă în mișcarea circulară uniformă.

3. Schimbăm corpul m (luăm un alt dop cu $m \approx 3{,}0$ g) și repetăm experiența.

4. Schimbăm corpul M (luăm $M \approx 30$ g) sau menținem dinamometrul la o altă valoare a forței F și repetăm experiența.

Prelucrarea datelor. Trebuie să verificăm legea

$$F = m\omega^2 R = 4\pi^2 m\frac{R}{T^2}. \qquad (3.62)$$

Alcătuim un tabel ca cel de mai jos:

F sau Mg [N]	m[kg]	R[m]	T[s])	$4\pi^2 mR/T^2$[N]
0,196	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$	0,40	0,41	0,188

Trebuie să comparăm valorile din prima coloană (F) cu cele din ultima coloană ($4\pi^2 mR/T^2$).

Experimentul simplu de mai sus, precum și nenumărate alte experiențe foarte precise și observații asupra mișcării circulare din natură confirmă valabilitatea legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$ în cazul mișcării circulare (în mișcarea circulară *uniformă* $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$).

În mișcările circulare neuniforme, pe lîngă componenta centripetă $F_n = -m\omega^2 r$, care modifică *direcția* vectorului viteză, mai apare și o componentă tangențială a forței ($F_t = mdv/dt$) care modifică *modulul* vectorului viteză.

EXEMPLU

În mișcarea de rotație proprie diurnă a Pămîntului, să se calculeze: viteza unghiulară de rotație a Pămîntului, viteza și accelerația centripetă a unui punct de pe suprafața Pămîntului, aflat la latitudinea $\varphi = 45°$ (fig. 3.52).

Rezolvare. Viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ rad}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

Ea este foarte mică (gîndiți-vă cît de încet trebuie să învîrtiți o minge ca ea să facă o rotație în 24 h). Viteza liniară:

$$v = \omega r = \omega R \cos\varphi = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1} \cdot 6\,380 \cdot 10^3\,\text{m} \cdot \cos 45° = 330 \text{ m/s}$$

și accelerația centripetă:

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 R \cos\varphi = 0{,}024 \text{ m/s}^2,$$

mult mai mică decît g ($a_n \approx g/400$ sau 0,25% din g).

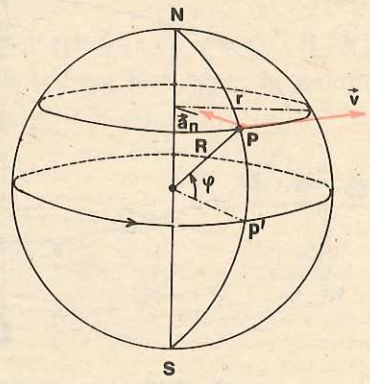


Fig. 3.52. Rotația proprie diurnă a Pămîntului.

3.5.4. **Forța centrifugă. Aplicații.** Principiile mecanicii, așa cum le-am formulat, sînt valabile într-un sistem de referință *inerțial*, de exemplu legat de Soare (sistemul heliocentric) sau de stele și nebuloase sau chiar de *Pămînt* într-o aproximație destul de bună. Într-un astfel de sistem de referință este valabil principiul inerției: un corp (punct material) *izolat*, adică nesupus la nici o forță, se mișcă rectiliniu uniform în virtutea inerției, sau este în repaus.

Dacă însă privim mișcarea dintr-un sistem de referință *neinerțial*, adică accelerat față de stele sau față de Pămînt, atunci un corp izolat apare în mișcare accelerată *față de noi*, fără să putem indica vreo forță — cauză a mișcării accelerate. Invers, într-un sistem de referință neinerțial un corp poate fi în repaus, deși asupra lui acționează o forță rezultantă. De exemplu, fie pe un disc un corp legat de centru printr-un fir cu dinamometru, ambele aflate într-o mișcare de rotație *uniformă* (după atingerea rotației uniforme nu este nevoie de nici o forță tangențială) (fig. 3.53). Pentru observatorul terestru, inerțial, forța de tracțiune centripetă exercitată de resortul dinamometrului obligă corpul să execute mișcarea circulară uniformă. Pentru observatorul situat pe platformă corpul este în repaus (față de acest observator) deși este tras spre centru de forța indicată de dinamometru. Lucrurile se petrec ca și cum asupra corpului ar mai acționa o „forță", centrifugă, egală în modul și opusă ca sens cu forța reală centripetă.

Ori de cîte ori studiem mișcarea unui corp într-un sistem de referință *neinerțial*, pe lîngă forțele reale $\vec{F}$ trebuie să introducem anumite *forțe complementare* $\vec{F}_c$ pentru a putea scrie și în astfel de repere legea: forța este egală cu masa înmulțită cu accelerația ($\vec{F} + \vec{F}_c = m\vec{a}$).

Forțele complementare nu există pentru un observator inerțial, ele nu satisfac principiul III al mecanicii (al acțiunii și reacțiunii sau al acțiunii reciproce),

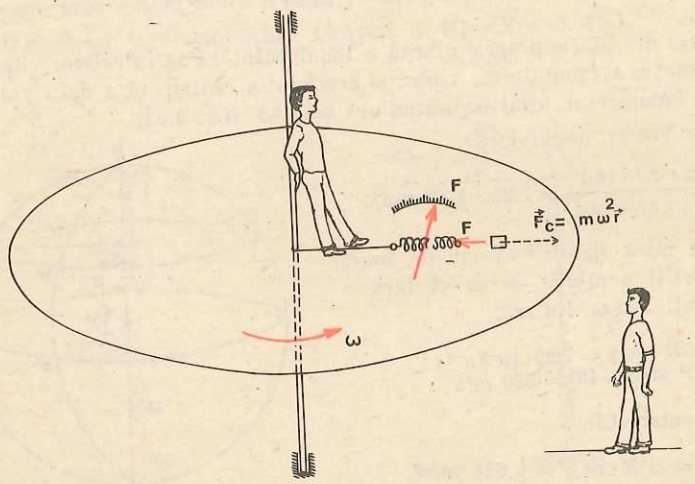


Fig. 3.53. Mișcarea circulară uniformă într-un sistem de referință inerțial și în sistemul de referință propriu.

nu există un corp din mediul înconjurător care să le exercite și asupra căruia să se exercite reacțiunea respectivă, adică ele nu sînt forțe de interacțiune. Forțele complementare se mai numesc pseudoforțe sau *forțe de inerție.* Observăm că Newton a numit *forțe de inerție*, forțele *reale* exercitate de corpul accelerat față de repere inerțiale, *asupra legăturilor*, de exemplu piatra asupra firului și mîinii. Luna asupra Pămîntului.

Pentru observatorul neinerțial forțele complementare se manifestă însă *ca forțe reale* pe care el nu le poate discerne de forțele reale (gravitaționale) cu ajutorul unor *experiențe locale în cadrul restrîns al laboratorului său*, ci numai dacă examinează și *mediul înconjurător.*

În cazul mișcării circulare uniforme a unui corp, pentru observatorul rotit solidar cu corpul, pe lîngă forța centripetă, apare și o forță complementară centrifugă (forța de inerție centrifugă) $\vec{F}_c = +m\omega^2\vec{r}$, care explică repausul relativ al corpului. De multe ori acest punct de vedere este mai sugestiv, deoarece reduce problema dinamică la o problemă de statică, de echilibru între aceste două forțe.

Iată cîteva exemple.

1. Într-un autobuz care virează brusc sîntem azvîrliți în afară de către forța (complementară) centrifugă, care va fi echilibrată de forța centripetă produsă de peretele autobuzului sau de scaun. Pentru observatorul terestru inerțial, nu există această forță centrifugă, podeaua și peretele vehiculului sînt deviate în timp ce noi avem tendința să ne mișcăm în continuare rectiliniu uniform, în virtutea inerției. Forța *centripetă* exercitată de perete ne obligă atunci să ne înscriem în mișcarea circulară a autobuzului.

2. *a*) Pe mașina centrifugă fixăm o tijă orizontală pe care alunecă liber două bile de mase diferite m_1, m_2, legate printr-un fir (fig. 3.54). Dacă punem bilele la egală distanță de axul de rotație și rotim tija, constatăm că bila de masă mai mare m_2 este aruncată la margine, trăgînd după ea și bila de masă mai mică m_1. În adevăr, în reperul legat de tijă asupra bilelor acționează forțele centrifuge $F_1 = m_1\omega^2 R$, $F_2 = m_2\omega^2 R$ în sensuri opuse, dar $F_2 > F_1$ ceea ce explică deplasarea lor.

Dacă aranjăm bilele la distanțe invers proporționale cu masele: $R_1/R_2 = m_2/m_1$ sau $m_1R_1 = m_2R_2$, atunci forțele centrifuge sînt egale în modul și de sensuri opuse și bilele rămîn în echilibru relativ la orice turație.

b) O altă experiență se face fixînd la mașina centrifugă un pahar bombat umplut cu mercur și apă colorată (fig. 3.55). În repaus, mercurul se așază la fund și apa deasupra, din cauza forțelor de greutate (mercurul avînd densitate mai mare decît apa).

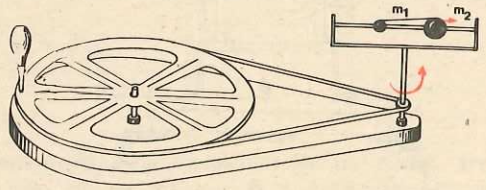


Fig. 3.54. Echilibrul unor bile la mașina centrifugă.

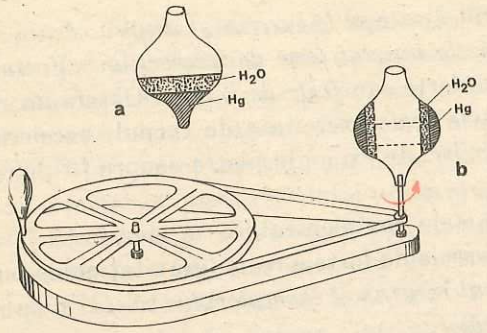


Fig. 3.55. Echilibrul lichidelor la mașina centrifugă.

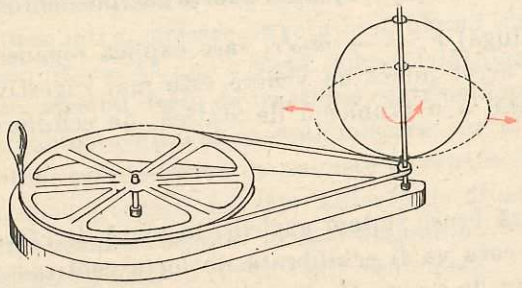


Fig. 3.56. Datorită rotației inelul se turtește.

Punînd în rotație rapidă paharul, constatăm că mercurul urcă și se așază ca un manșon la periferia bombată a paharului, iar apa în stratul următor spre centru. Această stratificare se explică cu ajutorul forțelor centrifuge, care sînt proporționale cu masa (și cu distanța pînă la axă), la fel cum se explică stratificarea în cazul repausului prin forțele de greutate.

c) Să punem pe mașina centrifugă un inel elastic de oțel care poate culisa liber pe axul vertical de rotație (fig. 3.56). Punînd în rotație inelul, el se turtește, datorită forțelor centrifuge care sînt proporționale cu distanța pînă la axa de rotație.

Un astfel de efect explică turtirea Pămîntului la poli.

3. Pentru a preîntîmpina solicitarea inegală a șinelor și chiar răsturnarea vagoanelor la curbe, calea ferată este suprainălțată la șina exterioară. La viraj forța centripetă este produsă de șine (asupra cărora se exercită acțiunea roților). Forța centrifugă $\vec{F}_c$ se compune cu greutatea $\vec{G}$ pentru a da rezultanta $\vec{R}$. Dacă această rezultantă cade perpendicular pe drum, șinele vor fi egal solicitate (fig. 3.57).

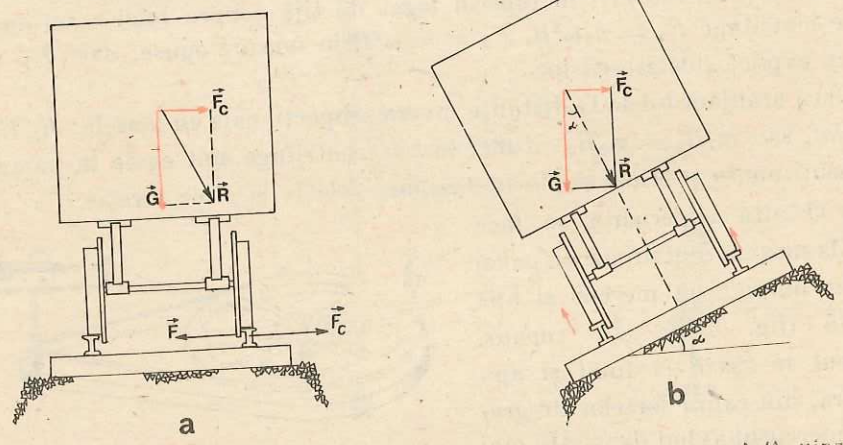


Fig. 3.57. La curbe linia exterioară este suprainălțată pentru a preîntîmpina solicitarea inegală a șinelor și chiar răsturnarea vagoanelor.

Unghiul de înclinare a drumului este dat de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{gR}. \qquad (3.63)$$

El nu depinde de masa vehiculului, ci de viteza acestuia și de raza de curbură R a drumului.

Analog, la viraje, bicicliștii și motocicliștii se înclină spre centrul de rotație (de curbură) pentru a nu cădea (fig. 3.58):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{v^2}{gR},$$

adică același rezultat ca pentru înclinarea drumurilor.

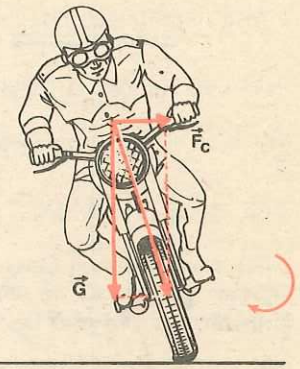


Fig. 3.58. La viraje bicicliștii și motocicliștii se înclină spre centrul de curbură pentru a nu cădea.

4. *a*) *Separatorul centrifugal.* Pentru a separa rapid particulele în suspensie într-un lichid, se așază vasele la mașina centrifugă. La turații mari forța centrifugă $F_c = m\omega^2 R$ este foarte mare și împinge particulele cu masă mai mare spre fundul vasului, unde ele se depun (fig. 3.59).

b) *Uscătorul centrifugal.* Separarea lichidelor de solide se face pe baza aceleiași metode. Corpurile sînt așezate într-un vas cilindric perforat fixat într-un vas cilindric mai larg (fig. 3.60). Prin rotirea rapidă a vasului interior, lichidul este împins spre exterior, iese prin orificiile peretelui și se scurge în vasul exterior.

Un astfel de uscător este folosit la mașinile de spălat. Un aparat asemănător servește pentru scoaterea mierii de albine din faguri.

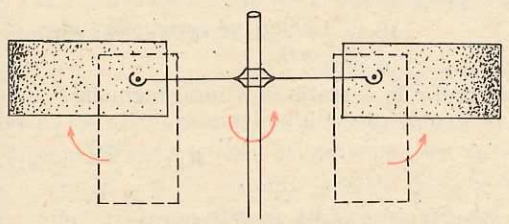


Fig. 3.59. Separatorul centrifugal.

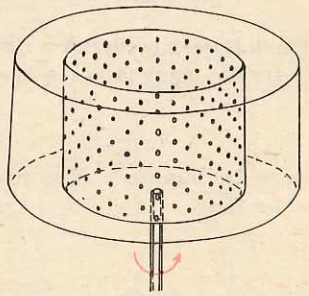


Fig. 3.60. Uscătorul centrifugal.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Pendulul conic. Un corp de dimensiuni neglijabile, suspendat de un punct fix, printr-un fir de lungime $l = 0{,}40$ m, este pus să descrie o circumferință într-un plan orizontal. Firul de suspensie descrie atunci pînza unui con cu deschiderea $2\alpha = 2 \cdot 60°$ (fig. 3.61).

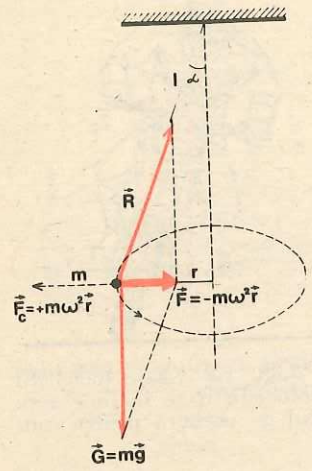


Fig. 3.61. Pendulul conic.

Să se afle perioada de rotație.

Rezolvare. Asupra corpului acționează două forțe: greutatea și tensiunea din fir. Rezultanta lor trebuie să fie forța centripetă, egală cu $m\omega^2 r$, deoarece corpul are o mișcare circulară uniformă. Din paralelogramul forțelor se vede că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{4\pi^2 r}{T^2 g},$$

dar $r = l \sin\alpha$, de unde

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 0{,}9\ \text{s}. \qquad (3.64)$$

Dacă considerăm sistemul de referință propriu atunci adăugăm forța centrifugă $\vec{F}_c = +m\omega^2\vec{r}$ și scriem condiția de echilibru relativ.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Cum trebuie să circule automobiliștii la curbe, dacă vremea este umedă (mîzgă) sau este polei? De ce?

   R: cu viteză redusă (pericol de derapaj datorită forței centrifuge și aderenței scăzute).

2. Ce viteză unghiulară și ce perioadă are o placă de patefon cu turația $n = 33$ rot/min?

   R: $\omega = 2\pi n = 1{,}1\,\pi \cong 3{,}5$ rad/s; $T = \dfrac{1}{n} = 1{,}8$ s.

3. Viteza liniară periferică a discurilor de polizor nu trebuie să depășească $v = 100$ m/s. Ce turație maximă poate avea un disc de diametru $D = 20$ cm?

   R: $n = \dfrac{v}{\pi D} = 16$ rot/s $= 960$ rot/min.

4. Să se afle durata a $N = 100$ rotații efectuate de o roată cu viteza unghiulară $\omega = 4\,\pi$ rad/s.

   R: $t = \dfrac{2\pi N}{\omega} = 50$ s.

5. Care este perioada de rotație și viteza unghiulară a acelor unui ceasornic?

   R: orar $T = 12$ h, $\omega = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ rad/s; minutar $T = 1$ h, $\omega = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ rad/s; secundar $T = 1$ min, $\omega = 0{,}105$ rad/s.

6. Vîrful minutarului unui ceasornic dintr-un turn s-a deplasat cu $\Delta s = 15{,}7$ cm într-un timp $\Delta t = 1$ min. Care este lungimea minutarului?

   R: $l = \dfrac{T\Delta s}{2\pi\Delta t} = 1{,}50$ m.

7. Un automobil se mișcă cu viteza $v = 72$ km/h și are roți cu diametrul $D = 60$ cm. Care este turația roților și accelerația normală a punctelor periferice ale roților?

   R: $n = v/\pi D = 10{,}6$ rot/s; $a_n = v^2/R = 1\,330$ m/s$^2 = 136 \cdot g$.

8. Cu ce viteză și în ce sens ar trebui să zboare un avion deasupra Ecuatorului pentru a vedea Soarele staționar?

   R: $v = 2\pi R/T = 460$ m/s spre vest.

9. Care ar trebui să fie durata unei zile și nopți pentru ca la Ecuator corpurile să n-aibă greutate (aparentă, ținînd seama de rotația Pămîntului)?

   R: $T = 2\pi\sqrt{R/g} = 1$ h 25 min.

10. Un autobuz de masă $m = 10{,}0$ t merge cu viteza $v = 54$ km/h peste un drum (pod) curbat: *a*) convex; *b*) concav, cu raza de curbură $R = 100$ m. Ce apăsare exercită autobuzul asupra drumului în punctul superior, respectiv cel inferior, al drumului?

    R: $N = mg \mp mv^2/R = (98 \mp 22{,}5)$ kN.

11. Un corp de masă $m = 5{,}0$ kg (o căldare cu apă), legat de o sfoară de lungime $l = 1{,}00$ m, este rotit într-un plan vertical. Care este frecvența minimă de rotație pentru ca sfoara să rămînă întinsă (apa să nu curgă)? Care va fi tensiunea în sfoară în acest caz, cînd corpul trece prin punctul inferior?

    R: $\nu_{min} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 0{,}50$ rot/s; $T = 2mg = 98$ N.

12. Un copil învîrtește o piatră, cu frecvența $\nu = 120$ rot/min într-un plan vertical, legată de un fir de lungime $l = 1{,}0$ m. În ce moment trebuie să lase firul liber pentru ca piatra să zboare vertical în sus? Pînă la ce înălțime se va ridica piatra?

    R: cînd piatra este la capătul diametrului orizontal cu viteza în sus;

    $$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2\pi^2 n^2 l^2}{g} = 8{,}0\ \text{m}.$$

13. Cu ce unghi trebuie înclinat drumul la o curbă de rază $R = 100$ m, prevăzut pentru circulație cu viteza $v = 54$ km/h ?

    R: $\operatorname{tg}\alpha = v^2/Rg = 0{,}23$; $\alpha = 13°$.

14. Un camion face un viraj de rază $R = 100$ m cu viteza $v = 54$ km/h. Care trebuie să fie coeficientul de frecare la alunecare minim dintre anvelope și șosea pentru ca autocamionul să nu lunece?

    R: $\mu_{min} = v^2/Rg = 0{,}23$.

15. La ce distanță maximă de centru poate fi așezată o monedă pe un disc de patefon care se rotește cu turația $n = 78$ rot/min pentru ca moneda să nu lunece? Coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}30$.

    R: $R_{max} = \mu g/4\pi^2 n^2 = 4{,}4$ cm.

16. Cu ce turație minimă trebuie rotit un cilindru de rază $r = 1{,}0$ m în jurul axei sale verticale, pentru ca un corp așezat pe peretele interior al cilindrului să rămînă în repaus față de cilindru (fig. 3.62)? Coeficientul de frecare între corp și cilindru $\mu = 0{,}25$.

    R: $n = (1/2\pi)\sqrt{g/\mu r} = 1{,}0$ rot/s.

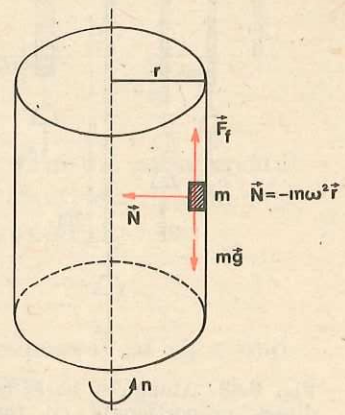


Fig. 3.62. Un corp în echilibru pe o suprafață în rotație (problema 16).

3.6.1. **Deformări elastice. Legea lui Hooke.** Cînd o forță acționează asupra unui corp, atunci acesta își modifică starea de mișcare sau se deformează. Vom analiza cazul cînd forțele produc numai deformări asupra corpului cu care interacționează.

Să tragem de un fir (tijă) dintr-un material oarecare (cauciuc, oțel, plumb, material plastic). Vom observa că firul se alungește, se deformează. Dacă acțiunea forței încetează sînt posibile două situații:

a) deformația nu dispare;

b) deformația dispare.

În primul caz deformările sînt permanente și ele caracterizează materialele numite *plastice*. În această categorie deosebim materiale ca: ceara, plastilina, plumbul, smoala etc.

În al doilea caz deformările sînt *elastice*. Majoritatea corpurilor prezintă această proprietate numită elasticitate. Corpuri perfect elastice nu există, dar dacă forțele care acționează asupra lor nu depășesc anumite limite, atunci deformațiile sînt considerate elastice.

EXPERIMENT

Un fir cilindric (de oțel sau cauciuc) de lungime l_0 și arie S_0 (aria secțiunii transversale), este suspendat vertical la un capăt (fig. 3.63, *a*). De capătul inferior se suspendă discuri identice cu masa cunoscută. Sub acțiunea greutății unui disc lungimea firului devine l (fig. 3.63, *b*). Diferența $l - l_0 = \Delta l$ se numește alungire absolută. Dacă suspendăm de fir două discuri, adică dacă dublăm forța de greutate se constată că și alungirea se dublează (fig. 3.63, *c*). Dacă forța crește de trei, de patru sau de mai multe ori, se constată că și alungirea crește de același număr de ori. Concluzia care se impune este:

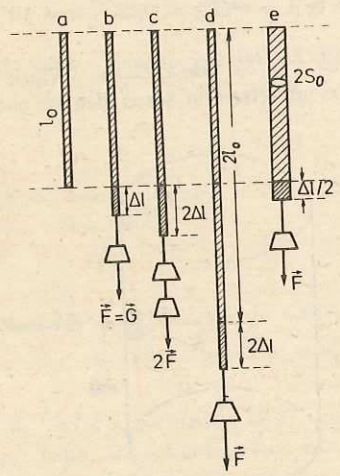


Fig. 3.63. Alungirea barei este direct proporțională cu forța deformatoare și cu lungimea sa inițială și invers proporțională cu aria secțiunii transversale.

alungirea este proporțională cu forța deformatoare $\Delta l \sim F$.

Alegem acum un fir din același material avînd aceeași secțiune dar lungimea inițială dublă $2l_0$. Suspendînd un disc ca în figura 3.63, *d*, se poate observa că în acest caz alungirea este dublă față de cazul din figura 3.63, *b*. Deci:

alungirea este proporțională cu lungimea inițială $\Delta l \sim l_0$.

Dacă înlocuim firul cilindric de lungime l_0 cu un altul de aceeași lungime, din același material dar cu aria secțiunii $2S_0$, suspendînd de el un disc vom observa că alungirea lui devine $\Delta l/2$ (fig. 3.63, *e*). Pe această cale se ajunge la concluzia:

alungirea este invers proporțională cu aria secțiunii transversale a materialului solicitat $\Delta l \sim \frac{1}{S_0}$.

Rezultatele obținute pe cale experimentală pot fi puse sub forma:

$$\Delta l \sim \frac{Fl_0}{S_0}.$$

Dacă lungimea inițială l_0, aria secțiunii (transversale) inițiale S_0 și forța F care acționează asupra firului vor rămîne neschimbate, dar vom experimenta cu fire din materiale diferite vom obține alungiri diferite. Deformările depind deci și de *natura materialului* supus solicitării. Aceste constatări experimentale pot fi scrise sub forma:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_0}{S_0} \text{ sau } \frac{F}{S_0} = E \frac{\Delta l}{l_0}, \sigma = E\varepsilon, \tag{3.65}$$

unde E este un factor de proporționalitate.

Raportul $F/S_0 = \sigma$, ce reprezintă forța exercitată pe unitatea de suprafață, se numește *tensiune sau efort unitar*; $\Delta l/l_0 = \varepsilon$ reprezintă raportul dintre alungirea absolută și lungimea inițială și se numește *alungire relativă* sau deformație specifică; factorul de proporționalitate E este o constantă de material și se numește *modul de elasticitate longitudinal*, sau modulul lui Young, se măsoară în N/m^2.

Relația (3.65) arată că alungirile relative $\Delta l/l_0$ sînt proporționale cu eforturile unitare F/S_0, pentru un material dat. Această dependență reprezintă *legea lui Hooke* sau legea deformărilor elastice. Legea lui Hooke este o lege empirică, obținută experimental, valabilă pînă la anumite valori ale efortului unitar, valori caracteristice materialului solicitat, motiv pentru care este denumită și lege de material.

Scriind relația (3.65) sub forma

$$F = \frac{ES_0}{l_0} \Delta l$$

și observînd că pentru un sistem fizic (de exemplu: firul din experimentul nostru, un resort etc.) putem pune $ES_0/l_0 = k$ (constant) expresie numită constantă de elasticitate (a firului sau a resortului) avem:

$$F = k\Delta l.$$

Constanta k se măsoară în N/m.

Notînd deformarea elastică (alungirea sau comprimarea) Δl cu x obținem, pentru forța care provoacă deformarea, expresia

$$F = kx. \tag{3.66}$$

Putem determina pe cale experimentală constanta de elasticitate a unui resort elastic, utilizînd legea deformărilor elastice.

Din trusa de experienţe de mecanică, alegem dinamometrul etalonat pentru măsurarea forţelor pînă la 1 N şi fixăm pe marginea lui o hîrtie milimetrică ca în figura 3.64. Pe ea vom măsura alungirile. Dinamometrul se fixează apoi, pe un suport aşa cum se arată în figura 3.65, iar de cîrligul său se suspendă cîrligul pentru discuri crestate, cu mase cunoscute. Se introduc pe el diferite discuri şi pentru fiecare valoare a masei discului (a greutăţii) se notează alungirea resortului. Fiecare determinare permite calculul factorului k din relaţia $F = k\Delta l$, unde $F = G = mg$.

Se înlocuieşte dinamometrul de 1 N cu cel de 2,5 N şi se repetă determinările. Rezultatele obţinute se trec într-un tabel (k_m este valoarea medie pentru k):

	Dinamometru 1N				Dinamometru 2,5 N			
Determinarea	$F = G$ (N)	Δl (m)	k (N/m)	k_m (N/m)	$F = G$ (N)	Δl (m)	k (N/m)	k_m (N/m)
1								
2								

Se obţin valori identice pentru fiecare determinare? De ce? Puteţi determina eroarea făcută?

3.6.2. **Forţa elastică.** În timpul deformării unui corp, în el apar forţe F_e egale ca valoare cu forţele deformatoare F şi orientate în sens opus acestora (fig. 3.66). Deci aceste forţe sînt de forma:

$$F_e = -kx. \tag{3.67}$$

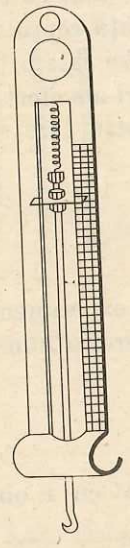


Fig. 3.64. Dinamometru.

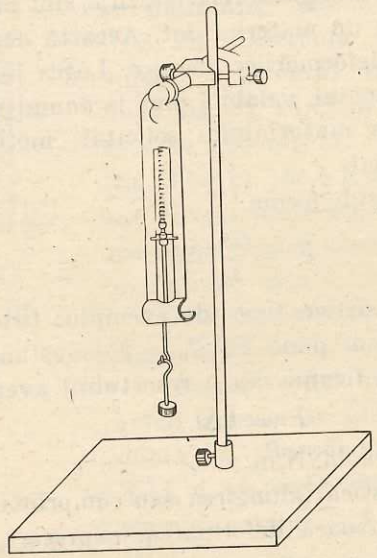


Fig. 3.65. Dispozitiv experimental pentru determinarea constantei elastice.

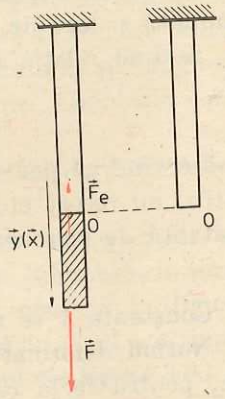


Fig. 3.66. În orice moment, forţa elastică este egală cu forţa deformatoare şi îndreptată în sens opus ei.

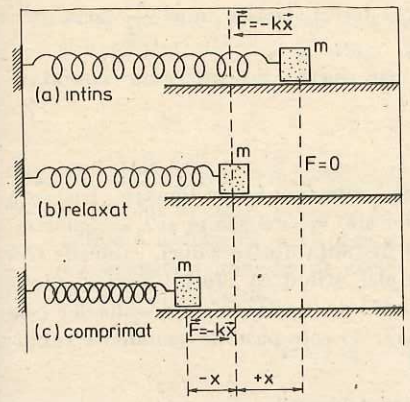


Fig. 3.67. Un resort elastic. Forţa exercitată de resort este arătată în fiecare caz. Corpul alunecă pe o masă fără frecări.

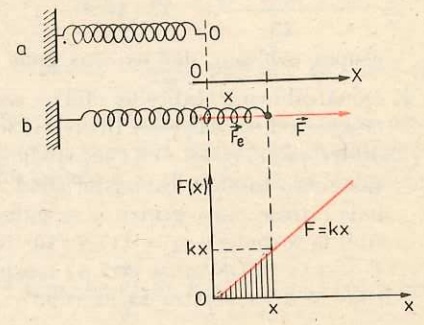


Fig. 3.68. Graficul dependenţei de alungire a forţei deformatoare, egală şi de sens opus cu forţa elastică.

Forţa F_e, proporţională cu valoarea deformaţiei şi orientată în sens opus creşterii deformaţiei, se numeşte forţă elastică.

Forţele elastice sînt forţe interne care apar între regiunile deplasate ale corpurilor solicitate şi sub acţiunea cărora ele revin la forma iniţială. Un exemplu de forţă elastică este forţa care apare într-un resort de oţel supus unei deformări (întindere sau comprimare). Figura 3.67 ilustrează forţa F care deformează resortul cu $\Delta l = x$ şi forţa elastică $F_e = -kx$ care apare în resort şi care tinde să-l readucă la forma iniţială. Figura 3.68 prezintă graficul dependenţei de alungire, $\Delta l = x$, a forţei deformatoare, egală ca valoare cu forţa elastică.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un ascensor cîntăreşte 980 kg, iar cablul său de acţionare, din oţel, are lungimea de 25 m şi cîntăreşte 0,800 kg/m. Pornirea se face uniform accelerat cu acceleraţia de 1,96 m/s². Efortul unitar admisibil în cablu σ_a este de $117{,}60 \cdot 10^6$ N/m², iar pentru oţel modulul de elasticitate este $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N/m². Se cere : *a)* forţa de tracţiune suportată de cablu la pornire; *b)* secţiunea cablului, pentru a nu se depăşi efortul unitar admisibil; *c)* alungirea cablului datorită forţei de tracţiune la pornire; *d)* forţa elastică care apare în cablu, la pornirea ascensorului, dacă secţiunea cablului este cea de la punctul *b*.

Rezolvare. a) Ascensorul şi cablul au împreună $m = 980 + 25 \cdot 0{,}8 = 1\,000$ kg. Forţa de tracţiune la pornire are valoarea:

$$F = m(g + a) = 1\,000 \cdot 11{,}76 = 11\,760 \text{ N}.$$

b) Din relaţia $\sigma_a = \dfrac{F}{S}$ rezultă $S = \dfrac{F}{\sigma_a} = \dfrac{11\,760}{11\,760 \cdot 10^4} = 10^{-4}$ m² = 1 cm².

c) Din $\Delta l = \dfrac{Fl}{SE}$ se obţine $\Delta l = \dfrac{11\,760 \cdot 25}{10^{-4} \cdot 19{,}6 \cdot 10^{10}} = 0{,}015$ m = 1,5 cm.

d) Din $F = -k\Delta l$ unde $k = \frac{SE}{l}$ rezultă valoarea forței elastice $F = \frac{SE}{l}\Delta l =$

$= \frac{10^{-4} \cdot 1{,}96 \cdot 10^{11}}{25} \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 11\,760$ N, egală cu forța de tracțiune exercitată asupra cablului, dar de sens opus acesteia.

2. Două cabluri metalice de oțel cu secțiunile egale $S_1 = S_2 = S = 1$ cm² sînt fixate de cîte un zid, iar capetele libere ale lor trebuie prinse împreună în prelungire. Distanța dintre ziduri este $l = 12$ m, iar lungimile cablurilor sînt $l_1 = 6{,}930$ m și $l_2 = 5{,}065$ m. Lungimea totală a cablurilor fiind mai mică decît distanța dintre ziduri, cablurile trebuie întinse bine, pentru a se putea prinde între ele. Știind că efortul unitar admisibil la întindere $\sigma_a = 117{,}6 \cdot 10^6$ N/m² și că modulul de elasticitate al cablurilor este $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m² se cer: *a)* tensiunile din cabluri; *b)* este posibilă prinderea cablurilor fără ca acestea să se rupă?

Rezolvare. a) După prinderea capetelor cablurilor tensiunile care apar au aceeași valoare:

$$T_1 = T_2 = T.$$

Suma alungirilor celor două cabluri trebuie să fie egală cu distanța dintre capetele care trebuie unite:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = l - (l_1 + l_2) = 12 - 11{,}995 = 0{,}005 \text{ m}.$$

Dar: $\Delta l_1 = \frac{T_1 l_1}{ES_1} = \frac{Tl_1}{ES}$ și $\Delta l_2 = \frac{T_2 l_2}{ES_2} = \frac{Tl_2}{ES}$.

Avem acum: $\Delta l = \frac{T}{ES}(l_1 + l_2)$ și de aici rezultă:

$$T = \frac{ES\,\Delta l}{l_1 + l_2} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{11{,}995} = 8\,753 \text{ N}.$$

b) Eforturile unitare în cabluri sînt:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{T}{S} = \frac{8\,753}{10^{-4}} = 87{,}53 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Pentru că $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_a$ rezultă că cele două cabluri pot fi întinse fără ca ele să se rupă.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Care este diferența între forța exprimată prin legea lui Hooke și forța elastică?

2. O bară de oțel cilindrică cu lungimea l_0=19,8 m s-a alungit datorită unei forțe de întindere $F = 98$ N cu $\Delta l = 0{,}455$ mm. Să se calculeze raza barei. Se cunoaște modulul de elasticitate al oțelului $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N/m².

R: $R_0 = \sqrt{\frac{Fl_0}{\pi E\,\Delta l}} = 0{,}26 \cdot 10^{-2}$ m.

3. Pentru a măsura modulul lui Young, se suspendă un corp cu greutatea $G = 4\,410$ N de un fir de oțel cu lungimea $l_0 = 5$ cm și secțiunea $S_0 = 0{,}0625$ cm²; se găsește că alungirea absolută a firului este $\Delta l = 0{,}18$ mm. Să se calculeze: efortul unitar σ, alungirea relativă ε și modulul de elasticitate E al firului de oțel.

R: $\sigma = \frac{G}{S_0} = 7\,056 \cdot 10^5$ N/m²; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = 0{,}0036$; $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N/m².

4. Să se calculeze alungirea unei bare de oțel de secțiune pătrată și de lungime $l_0 = 20$ m sub efectul propriei greutăți. Densitatea barei este $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m³ și $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m². Se consideră $g = 10$ m/s².

R: $\Delta l = \frac{1}{2E} \cdot \rho g l_0^2 \simeq 7{,}85 \cdot 10^{-5}$ m

5. Un cablu de oțel are lungimea l_0=20 m și este format din împletirea a N=70 fire de oțel. Cu cablul de acest profil se ridică un corp cu masa $m = 904$ kg. Știind că alungirea cablului a fost $\Delta l = 15$ mm și $E = 2{,}15 \cdot 10^{11}$ N/m², $g = 10$ m/s², să se calculeze:
a) diametrul unui fir de oțel;
b) efortul în cablu.

R: *a)* $d_0 = \sqrt{\frac{4\,mgl_0}{N\pi E\,\Delta l}} = 1$ mm; *b)* $\frac{F}{S_0} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = 15 \cdot 10^7$ N/m².

6. Un corp de masă $m = 510$ kg este deplasat pe un plan orizontal cu ajutorul unui cablu paralel cu direcția planului. Cablul are lungimea l_0, secțiunea $S_0 = 16$ cm² și modulul de elasticitate $E = 2{,}15 \cdot 10^{11}$ N/m². Considerînd $g = 10$ m/s² și coeficientul de frecare la alunecare a corpului pe plan $\mu = 0{,}215$, să se calculeze:
a) raportul alungirilor cablului în cazul deplasării uniforme a corpului și în cazul deplasării uniform accelerate cu accelerația $a = 2{,}5$ m/s²;
b) alungirile relative în cele două cazuri de deplasare.

R: *a)* $\frac{\Delta l_u}{\Delta l_a} = \frac{\mu g}{a + \mu g} \approx 0{,}46$; $\frac{\Delta l_u}{l_0} = \frac{\mu mg}{S_0 E} \approx 3 \cdot 10^{-6}$; *b)* $\frac{\Delta l_a}{l_0} = \frac{m(a + \mu g)}{S_0 E} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-6}$.

3.7. LEGEA ATRACȚIEI UNIVERSALE A LUI NEWTON. CÎMPUL GRAVITAȚIONAL

3.7.1. Legea atracției universale a lui Newton. Proprietatea unui corp de a cădea către Pămînt, greutatea sa, a fost privită ca o proprietate inerentă tuturor corpurilor pînă în secolul al XVII-lea. Newton este acela care a afirmat că greutatea unui corp trebuie privită ca o forță de atracție dintre Pămînt și acel corp.

Mișcarea corpurilor cerești, în particular cea a planetelor și a Soarelui, era pe vremea lui Newton un subiect de mare interes. Legile mișcărilor acestor corpuri erau considerate ca fiind cu totul diferite de cele ale mișcării corpurilor de pe Pămînt. Newton a considerat că aceeași forță a gravitației care atrage un corp (de exemplu un măr) către Pămînt, ar putea atrage de asemenea și Luna către Pămînt, altfel ea s-ar mișca pe o traiectorie rectilinie și nu pe una (aproape) circulară.

Datorită acestei forțe de atracție apare o accelerație centripetă care poate fi calculată știind perioada de revoluție de $T = 28$ zile și raza orbitei pe care se mișcă Luna în jurul Pămîntului, $R_{PL} = 380\,000$ km. Din expresia accelerației centripete se obține

$$a_L = 4\pi^2 \frac{R_{PL}}{T^2} = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

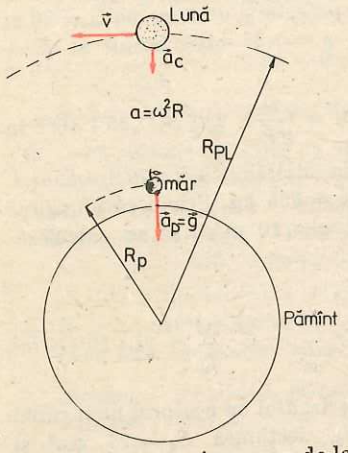


Fig. 3.69. Luna şi un corp de la suprafaţa Pămîntului sînt atrase spre centrul Pămîntului.

Această valoare, $a_L = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ m/s², este de aproximativ 3 600 ori mai mică decît g, adică

$$a_L = \frac{g}{3\,600} = \frac{9{,}8}{3\,600}\ \text{m/s}^2.$$

Newton a explicat această diferenţă, bazîndu-se pe ideea că acceleraţia unui corp în cădere este invers proporţională cu pătratul distanţei sale pînă la Pămînt, $1/R^2$. Considerînd masa Pămîntului concentrată în centrul său, un corp care cade la suprafaţa Pămîntului se află la o distanţă de o rază terestră, $R_P \approx$ $\approx$ 6 400 km de centrul efectiv de atracţie. Dar Luna se află la aproximativ 380 000 km distanţă (R_{PL}) de Pămînt. Pătratul raportului acestor distanţe

$$\left(\frac{R_P}{R_{PL}}\right)^2 = \frac{(6\,400)^2}{(380\,000)^2} = \frac{1}{3\,600}$$

este în concordanţă cu raportul a_L/g.

Forţele exercitate asupra Lunii şi asupra corpului de la suprafaţa Pămîntului depind de masa Lunii şi respectiv de masa corpului precum şi de masa Pămîntului. Aşadar Newton a presupus că forţa de atracţie gravitaţională depinde atît de masele corpurilor care se atrag cît şi de inversul pătratului distanţei dintre ele. Mai mult, el a considerat că toate corpurile din Univers, indiferent unde s-ar afla ele, exercită o forţă de atracţie gravitaţională (fig. 3.69) unele asupra altora.

Forţa gravitaţională dintre două corpuri cu masele m_1 şi m_2 considerate punctiforme faţă de distanţa dintre ele, situate la o distanţă r unul faţă de altul, este o forţă de atracţie care acţionează de-a lungul liniei ce uneşte corpurile şi are valoarea:

$$F = K\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.68}$$

unde K este o constantă universală avînd aceeaşi valoare pentru orice pereche de corpuri din Univers.

Relaţia (3.68) exprimă *legea atracţiei universale.*

Observaţii. Forţele gravitaţionale dintre două corpuri constituie o pereche acţiune-reacţiune. Corpul de masă m_1 exercită, asupra corpului de masă m_2, o forţă $\vec{F}_{12}$, avînd direcţia dată de dreapta care uneşte cele două corpuri şi sensul aşa cum se arată în figura 3.70. La rîndul său corpul de masă m_2 exercită, asupra corpului de masă m_1, o forţă $\vec{F}_{21}$ egală în valoare cu $\vec{F}_{12}$, avînd aceeaşi direcţie cu aceasta dar sensul opus.

Relaţia (3.68) exprimă valoarea forţei de atracţie gravitaţională dintre două corpuri punctiforme. Pentru corpuri ca Pămîntul, Luna, Soarele etc. se va presupune că întreaga masă este concentrată în centrele lor de masă.

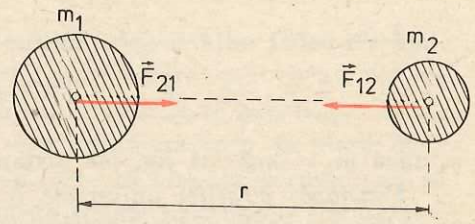


Fig. 3.70. Forţele gravitaţionale dintre două corpuri sînt forţe de atracţie şi constituie o pereche acţiune-reacţiune.

Legea atracţiei universale implică ideea că forţa gravitaţională dintre două corpuri este independentă de prezenţa altor corpuri sau de proprietăţile spaţiului dintre ele.

Constanta K poate fi determinată pe cale experimentală. Pentru aceasta trebuie măsurată forţa de atracţie dintre două corpuri de mase cunoscute. Prima măsurătoare de acest fel a fost făcută de Cavendish în 1798. Astăzi, pentru constanta atracţiei universale, este acceptată valoarea $K = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Constanta K a fost determinată cu ajutorul balanţei de torsiune care este reprezentată în figura 3.71.

De capetele unei tije rigide şi uşoare de lungime l sînt fixate două sfere mici, fiecare de masă m(50 g). Tija prevăzută cu cele două sfere este suspendată, printr-un fir vertical foarte fin din cuarţ, astfel încît axa ei să fie orizontală. Două sfere mari, fiecare de masă M(50 kg) sînt situate în vecinătatea capetelor tijei şi determină, datorită atracţiei gravitaţionale, răsucirea firului de cuarţ. Măsurînd pe scală unghiul cu care s-a răsucit firul, se poate calcula valoarea forţei de atracţie dintre sfere, pentru că această forţă este proporţională cu unghiul de răsucire a firului, Fl = constantă · α.

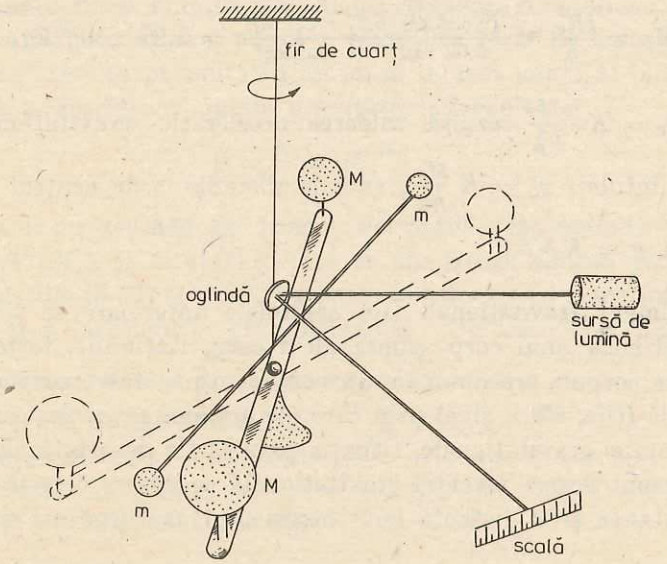


Fig. 3.71. Balanţa lui Cavendish folosită pentru determinarea constantei K.

Din:

$$F = K\frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ rezultă } K = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

și dacă $m_1 = m_2 = 1$ kg, iar distanța $r = 1$ m se obține $K = F$. Adică:

Constanta atracției universale K este numeric egală cu forța, exprimată în newtoni, care se exercită între două corpuri punctiforme avînd fiecare masa de 1 kg și fiind situate la distanța de 1 metru.

Rezultă că două corpuri punctiforme, cu masa de un kilogram fiecare, aflate la un metru depărtare unul de altul se atrag cu o forță egală cu $6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N ceea ce reprezintă aproximativ $\frac{1}{15} \cdot 10^{-9}$ N! Acum se poate înțelege de ce forța de atracție dintre două corpuri aflate la suprafața Pămîntului nu poate fi observată direct. În timp ce două corpuri cu masa de cîte un kilogram fiecare, aflate la un metru depărtare unul de altul, se atrag cu o forță de $F = \frac{1}{15} \cdot 10^{-9}$ N, fiecare dintre ele este atras de Pămînt cu o forță de $F' = 9{,}8$ N, deci o forță de $147 \cdot 10^9$ ori mai mare decît F.

Forța gravitațională mare pe care Pămîntul o exercită asupra tuturor corpurilor de la suprafața sa se datorește masei foarte mari a Pămîntului. Știind valoarea lui K putem determina masa Pămîntului. Să considerăm Pămîntul de masă M_P și un corp de pe suprafața sa cu masa m. Forța de atracție gravitațională este dată atît de legea a II-a a dinamicii $F = mg$ cît și de relația $F = K\frac{mM_P}{R_P^2}$, de unde rezultă:

$$M_P = \frac{gR_P^2}{K} = \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)\,(6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Din $mg_0 = K\frac{mM_P}{R_P^2}$ rezultă valoarea accelerației gravitaționale la suprafața Pămîntului, $g_0 = K\frac{M_P}{R_P^2}$, care la distanța r de centrul Pămîntului are valoarea $g = K\frac{M_P}{r^2}$. (3.69)

3.7.2. **Cîmpul gravitațional.** Din capitolele anterioare se știe că forță înseamnă acțiunea unui corp asupra altui corp. Acțiunile, forțele, care se exercită între corpuri presupun fie un contact direct între corpuri, fie legături materiale (tije, sfori, șine) prin care ele acționează unele asupra altora. În cazul atracției gravitaționale, situația pare să fie deosebită. De aceea s-a vorbit la început despre atracția gravitațională ca despre o forță care acționează instantaneu și la distanță fără intermediul unei legături materiale între corpuri.

Cel care a formulat ideea că în cazul gravitației este vorba de un efect care se transmite din aproape în aproape, de la un punct din spațiu la altul, a fost Faraday.

Astăzi se consideră că orice corp modifică proprietățile fizice ale spațiului înconjurător, în așa fel încît în acest spațiu asupra unui corp care are caracteristica particulară masă, masă grea sau gravifică, se exercită o forță. Cu alte cuvinte, regiunea din spațiu în care există un corp de masă dată este purtătoarea unei proprietăți fizice noi, care în absența corpului nu se manifestă. În această regiune se manifestă un sistem fizic numit *cîmp gravitațional sau cîmp gravific.*

Cîmpul gravitațional, formă de existență a materiei distinctă de substanță, face posibilă transmiterea din aproape în aproape a atracției dintre corpuri. Legea atracției universale ne arată că orice corp trebuie privit ca o sursă, un izvor, de cîmp gravitațional.

De exemplu, fie Pămîntul o sursă de cîmp gravitațional izolată de alte surse (Lună, Soare, planete). Dacă în vecinătatea Pămîntului este adus un corp de masă $m \ll M_P$, denumit corp de probă, atunci asupra lui se va exercita o forță de atracție F pe direcția razei Pămîntului (presupus sferic) care trece prin acel punct (fig. 3.72). Valoarea acestei forțe este:

$$F = K\frac{mM_P}{r^2},$$

unde r este distanța dintre centrul Pămîntului și corpul de probă, M_P masa Pămîntului, m masa corpului de probă.

Raportul

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{\Gamma}, \qquad (3.70)$$

definește mărimea fizică numită *intensitatea cîmpului gravitațional* produs de sursa gravifică Pămînt în acel punct și semnifică forța de atracție gravitațională care se exercită pe unitatea de masă în acel punct al cîmpului. Din definiția dată intensității cîmpului gravitațional rezultă

$$\Gamma = \frac{F}{m} = K\frac{M_P}{r^2}. \qquad (3.70')$$

Deci mărimea Γ nu depinde de corpul de probă, ea depinde numai de sursa gravifică (M_P) și locul (r) în care se analizează cîmpul gravitațional. Comparînd relațiile (3.69) și (3.70′) se poate constata egalitatea între valorile mărimilor Γ și g (accelerația gravitațională). De asemenea din (3.70) se observă că mărimea $\vec{\Gamma}$ este o mărime vectorială.

Din faptul că intensitatea cîmpului gravitațional este o mărime vectorială, rezultă că putem descrie sistemul cîmp gravitațional cu ajutorul unei mulțimi de vectori $\vec{\Gamma}$ atașați punctelor din jurul sursei gravitaționale unde aceasta își manifestă

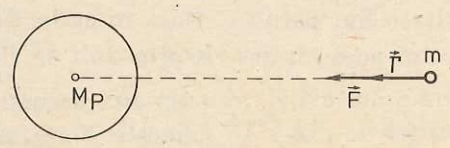


Fig. 3.72. Forța ($\vec{F}$) de atracție exercitată de Pămînt asupra unui corp de probă și intensitatea ($\vec{\Gamma}$) a cîmpului gravitațional.

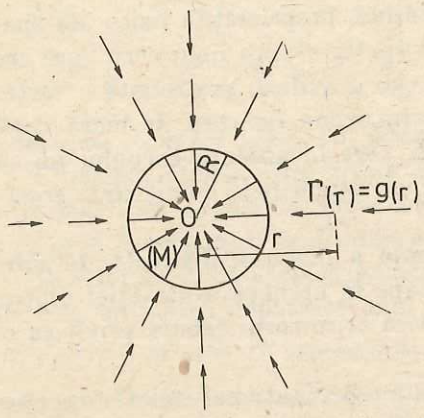


Fig. 3.73. Un cîmp gravitațional radial, generat de un corp sferic omogen și vectorii intensitate atașați acestui cîmp.

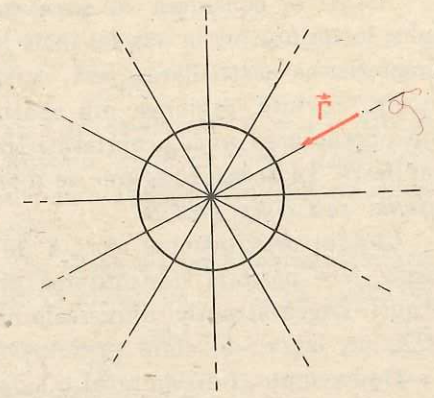


Fig. 3.74. Reprezentarea unui cîmp gravitațional prin linii de cîmp.

prezența (fig. 3.73). Deoarece acestui cîmp fizic i se poate asocia un cîmp de vectori se spune că el este un *cîmp vectorial*. Cîmpul gravitațional produs de o distribuție statică dată a masei unui corp este și un exemplu de *cîmp staționar*, deoarece valoarea intensității cîmpului într-un punct dat nu variază în timp.

Cîmpul gravitațional, ca orice cîmp fizic de altfel, poate fi reprezentat și prin linii de cîmp. Liniile de cîmp sînt linii a căror tangentă coincide în fiecare punct cu direcția vectorului intensitate a cîmpului respectiv. Pentru un corp sferic omogen liniile de cîmp arată ca în figura 3.74 și ele coincid cu direcțiile razelor care pornesc din centrul sursei de cîmp; un astfel de cîmp este un *cîmp radial sau central.*

Măsurători efectuate la distanțe mari (de ordinul $10^2 - 10^4$ km), cu ajutorul sateliților artificiali, au dus la concluzia că în cazul Pămîntului, cîmpul său gravitațional este un cîmp radial.

Dacă este investigat, cercetat, cîmpul gravitațional al Pămîntului în imediata sa vecinătate, în regiuni de mică întindere, de exemplu într-o sală de clasă sau de laborator, atunci se poate constata că în puncte diferite ale spațiului investigat $\vec{\Gamma}$ are aceeași valoare, iar direcțiile vectorilor intensitate sînt paralele. Deci, în astfel de regiuni cîmpul gravitațional al Pămîntului poate fi descris prin linii de cîmp paralele și echidistante, intensitatea cîmpului avînd aproximativ aceeași valoare în toate punctele (fig. 3.75). Un astfel de cîmp se numește *cîmp uniform.*

În cazul unui sistem de surse gravifice, intensitatea cîmpului într-un punct este suma vectorială a intensităților cîmpurilor gravitaționale produse de fiecare sursă în punctul considerat (fig. 3.76).

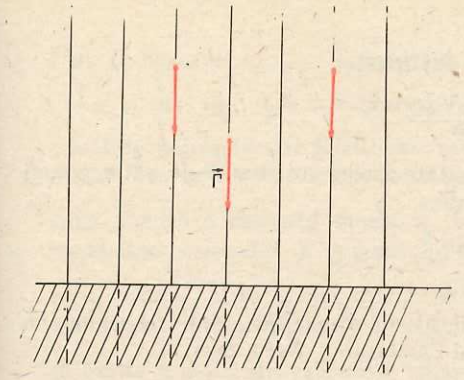


Fig. 3.75. Cîmp gravitațional uniform.

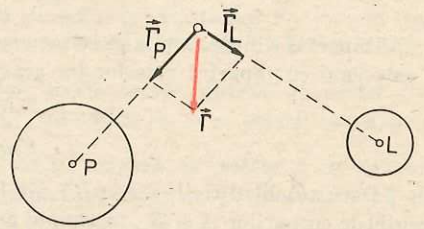


Fig. 3.76. Intensitatea cîmpului gravitațional produs de două corpuri (două surse gravifice) este suma vectorială a intensităților cîmpurilor gravifice produse de fiecare corp (sursă) în parte.

3.8. MASA GRAVIFICĂ. RELAȚIA DINTRE MASA GRAVIFICĂ ȘI MASA INERȚIALĂ. SATELIȚII ARTIFICIALI

3.8.1. Masa gravifică. Relația dintre masa gravifică și masa inerțială. În capitolul II paragraful 2.3.1 s-a arătat că în ecuația (2.5), $\vec{F} = \vec{ma}$, masa apare în calitate de măsură a inerției corpului. Într-adevăr dacă încercăm să împingem un corp aflat în repaus pe o suprafață orizontală, fără frecări, constatăm că este necesară o anumită forță pentru a-l pune în mișcare. Aici se manifestă inerția corpului, gravitația nu se manifestă. Experimentul se poate face și într-un spațiu lipsit de gravitație (stare de imponderabilitate). În acest caz pentru accelerarea corpului ar fi necesară aceeași forță $\vec{F} = \vec{ma}$, deci masa m este masă inertă.

În cele ce urmează vom arăta că există situații diferite de cea anterioară în care de asemenea este implicată masa corpului. De exemplu, pentru a ține un corp în repaus deasupra Pămîntului este necesară o forță, în caz contrar lăsat liber corpul cade spre Pămînt într-o mișcare accelerată. Forța care ține corpul este egală ca valoare cu forța de atracție gravitațională dintre el și Pămînt. În această situație inerția nu joacă nici un rol; aici este importantă proprietatea corpurilor materiale de a fi atrase de alte corpuri, cum ar fi Pămîntul. Forța de atracție gravitațională este:

$$F = K \frac{m_g M_P}{R_P^2},$$

unde m_g este masa gravitațională, masa grea a corpului.

Sînt masele m_g (masa gravitațională) și m (masa inertă) ale aceluiași corp identice?

Fie două corpuri A și B, de mici dimensiuni, cu masele gravitaționale m_{gA} și m_{gB} asupra cărora acționează un al treilea corp C cu masa gravitațională m_{gC}. Fie corpul C la egală distanță r de celelalte două (fig. 3.77). Forța gravitațională exercitată asupra lui A de către C este.

$$F_{AC} = K \frac{m_{gA} m_{gC}}{r^2},$$

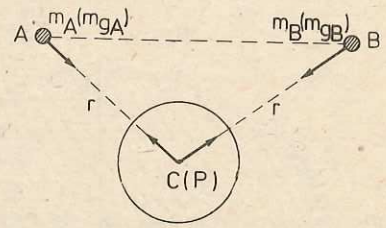


Fig. 3.77. Forțele exercitate de un corp C asupra a două corpuri A și B aflate la egală distanță de C.

forța gravitațională cu care C acționează asupra lui B este:

$$F_{BC} = K \frac{m_{gB} m_{gC}}{r^2}.$$

Raportul dintre forțele gravitaționale exercitate asupra lui A și B de către corpul C este egal cu raportul maselor lor gravitaționale:

$$\frac{F_{AC}}{F_{BC}} = \frac{m_{gA}}{m_{gB}}.$$

Dacă cel de-al treilea corp C este Pămîntul, atunci F_{AC} și F_{BC} sînt ceea ce numim greutățile corpurilor A și B, în cîmpul gravific al Pămîntului. Avem deci:

$$\frac{G_A}{G_B} = \frac{m_{gA}}{m_{gB}}.$$

Așadar legea atracției universale implică faptul ca greutățile diferitelor corpuri, în același loc pe suprafața Pămîntului sînt exact proporționale cu masele lor gravitaționale.

Să măsurăm masele inerte m_A și m_B ale corpurilor A și B pe o cale oarecare (de exemplu prin metoda ciocnirilor). Să lăsăm apoi aceste corpuri să cadă spre Pămînt dintr-un anumit loc și să măsurăm accelerațiile mișcărilor lor. Se află experimental, că obiecte, corpuri, cu mase inerțiale diferite cad cu aceeași accelerație g datorită atracției gravitaționale terestre. Dar forțele de atracție gravitaționale exercitate asupra corpurilor reprezintă chiar greutățile lor, astfel încît din legea a doua a dinamicii obținem:

$$G_A = m_A \cdot g \text{ și } G_B = m_B \cdot g$$

sau

$$\frac{G_A}{G_B} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Deci greutățile corpurilor în același loc de pe Pămînt sînt de asemenea exact proporționale cu masele lor inerte.

Așadar masa inertă și masa gravitațională sînt cel puțin proporționale între ele. Astăzi se consideră că masa inerțială este echivalentă cu masa gravitațională.

În anul 1909 Eötvös a construit un aparat care putea detecta o diferență de $5 \cdot 10^{-9}$ în valoarea forței gravitaționale. El a aflat că masele inerte egale suferă totdeauna forțe gravitaționale egale în limitele preciziei aparatului său.

În fizica clasică, newtoniană, echivalența dintre masa gravitațională și masa inertă a fost considerată ca o coincidență remarcabilă fără vreo semnificație mai adîncă. În fizica modernă, însă, echivalența masei grele și a masei inerțiale este considerată un fapt fundamental care duce la o înțelegere mai profundă a gravitației.

3.8.2. **Sateliții artificiali.** Să considerăm un punct A situat în cîmpul gravitațional al Pămîntului la distanța r de centrul acestuia (fig. 3.78). Un corp de masă m lăsat

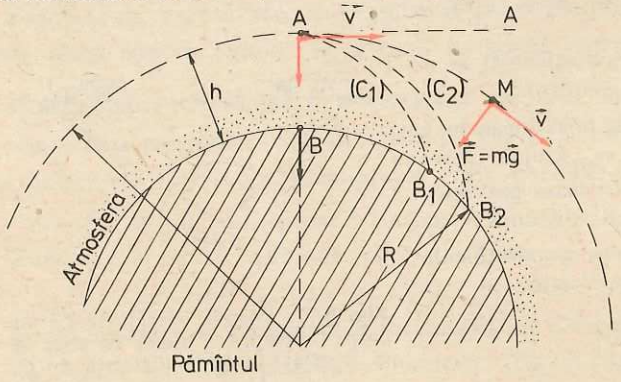


Fig. 3.78. Există o valoare a vitezei cu care un corp lansat din A se deplasează pe o traiectorie ce înconjură Pămîntul devenind satelit artificial.

liber în punctul A, se va mișca după direcția razei r, adică după linia de cîmp, și va cădea în punctul B, de la suprafața Pămîntului. Dacă în punctul A corpul are o viteză $\vec{v}$ orientată perpendicular pe direcția intensității cîmpului gravitațional $\vec{\Gamma}$ din acel punct, atunci el se mișcă descriind o traiectorie curbă care nu mai coincide cu direcția liniei de cîmp. Pentru o anumită viteză $\vec{v}_1$ a corpului, acesta se va deplasa pe curba C_1 și va ajunge pe Pămînt în punctul B_1. Pentru o altă viteză $v_2 > v_1$ corpul se va deplasa pe o curbă C_2 și va ajunge în B_2. Se observă, că pe măsură ce viteza $\vec{v}$ crește, corpul ajunge pe Pămînt într-un punct din ce în ce mai depărtat de B. Înseamnă că poate să existe o astfel de valoare a vitezei $\vec{v}$ pentru care corpul nu mai ajunge pe Pămînt ci descrie o mișcare circulară în jurul Pămîntului. Un astfel de corp se numește *satelit artificial al Pămîntului*.

Cînd satelitul descrie o mișcare circulară în jurul Pămîntului, în fiecare punct al traiectoriei, direcția vectorului viteză $\vec{v}$ este perpendiculară pe direcția intensității cîmpului gravitațional radial. Accelerația centripetă a satelitului $a = v^2/r$ este imprimată de forța gravitațională a Pămîntului, $F = m\Gamma$. Din legea a doua a dinamicii avem:

$$F = ma \text{ și } \frac{mv^2}{r} = m\Gamma, \text{ de unde rezultă } \frac{v^2}{r} = \Gamma(r).$$

Deci pentru a descrie o traiectorie de rază r viteza satelitului trebuie să ajungă la valoarea:

$$v = \sqrt{r\Gamma(r)}, \tag{3.71}$$

unde $\Gamma(r)$ este intensitatea cîmpului gravitațional în punctele corespunzătoare traiectoriei satelitului. Ea este numeric egală cu valoarea g a accelerației gravitaționale din acel loc $\Gamma(r) = g(r)$.

Un satelit artificial al Pămîntului care are traiectoria în imediata vecinătate a suprafeței lui trebuie să aibă viteza $v_0 = \sqrt{R \cdot g_0} = 7{,}9$ km/s, unde $R = 6\,400$ km este raza Pămîntului și $g_0 = 9{,}8$ m/s^2 este accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului. Valoarea $v_0 = 7{,}9$ km/s se numește *prima viteză cosmică* și este o valoare caracteristică cîmpului gravitațional al Pămîntului.

Dacă satelitul se află la distanța $r = R + h$ de centrul Pămîntului din relațiile

$$\Gamma = g(r) = k \frac{M_P}{(R+h)^2} \text{ și } \Gamma_0 = g_0(R) = K \frac{M_P}{R^2} \text{ rezultă:}$$

$$g(r) = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

și înlocuind în expresia lui v se obține:

$$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}.$$

Pentru ca traiectoria satelitului să fie relativ stabilă este necesar ca asupra lui să nu se exercite forțe de frecare cu aerul (forțe perturbatoare) motiv pentru care altitudinea h la care se plasează un satelit este mare, de ordinul a 10^2 km, acolo unde rarefierea aerului este pronunțată (mare).

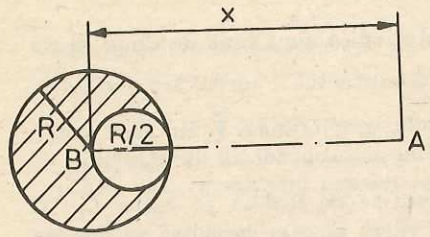


Fig. 3.79. La problema rezolvată.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Într-o sferă masivă de masă m_1 și de rază R se practică o cavitate sferică de rază $R/2$ care este tangentă la suprafața sferei masive.
Să se exprime forța gravitațională dintre sferă și un punct material m_2 aflat la distanța $x (x \geqslant R)$ de centrul sferei masive și pe direcția care unește centrul sferei cu centrul cavității.

Rezolvare. Deoarece în enunț se specifică $x \geqslant R$ vom considera atît sfera cît și cavitatea sferică drept puncte materiale situate în centrele sferelor.
Distingem două cazuri:

a) punctul material se află de aceeași parte cu cavitatea (fig. 3.79). În acest caz forțele de interacțiie sînt F_1, F_2 iar rezultanta lor este:

$$F = F_1 - F_2, \tag{1}$$

unde $F_1 = K\dfrac{m_1 m_2}{x^2}$ și $F_2 = K\dfrac{m_1 m_2}{8(x - R/2)^2}$ și înlocuind în (1)

$$F = \frac{Km_1m_2}{8} \cdot \frac{7x^2 - 8xR + 2R^2}{x^2(x - R/2)^2};$$

b) punctul material se află în partea opusă cavității.
Avem în acest caz:

$$F' = F'_1 - F'_2. \tag{1'}$$

Unde $F'_1 = K\dfrac{m_1 m_2}{x^2}$ și $F'_2 = K\dfrac{m_1 m_2}{8\left(x + \dfrac{R}{2}\right)^2}$ și înlocuind în (1') avem:

$$F' = \frac{Km_1m_2}{8} \cdot \frac{7x^2 + 8xR + 2R^2}{x^2(x + R/2)^2}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Considerînd Pămîntul și Luna două corpuri punctiforme, explicați cum variază greutatea unui cosmonaut într-o călătorie cu mișcare rectilinie uniformă de la Pămînt la Lună.
2. Explicați de ce toate corpurile cad la fel de repede în vid cu toate că forța de atracție gravitațională este proporțională cu masa lor.
3. Undeva, într-un punct de pe suprafața Pămîntului se așază un tun uriaș. Se poate lansa un satelit artificial al Pămîntului folosind acest tun? (Se neglijează dificultățile tehnice și frecările cu aerul.)
4. Se confecționează un proiectil suficient de mare ca să încapă în el oameni și materiale. Proiectilul este lansat în vid dintr-un tun special. Pasagerii afirmă că la un moment dat au încetat să mai simtă atracția gravitațională. Cînd a fost posibil acest lucru?

   R: tot timpul (din momentul părăsirii tunului pînă la atingerea Pămîntului).

5. Un corp cu masa $m_1 = 800$ kg se află la distanța $r = 0{,}25$ m de un alt corp cu masa $m_2 = 600$ kg. Să se calculeze intensitatea cîmpului gravitațional într-un punct situat la $r_1 = 0{,}20$ m de m_1 și la distanța $r_2 = 0{,}15$ m de m_2.

   R: $\Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2\cos\alpha}$, $\Gamma_1 = K\dfrac{m_1}{r_1^2}$, $\Gamma_2 = K\dfrac{m_2}{r_2^2}$, $\cos\alpha = 0$, $\Gamma = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ N/kg.

6. Cunoscînd că distanța dintre Pămînt și Lună este $d = 384 \cdot 10^3$ km și că $m_P = 81\, m_L$, să se afle la ce distanță de centrul Lunii cîmpul gravitațional rezultant este nul.

   R: $x = \dfrac{d}{1 + \sqrt{m_P/m_L}} = \dfrac{d}{10} = 38{,}4 \cdot 10^3$ km.

7. Două corpuri sferice cerești au raportul razelor 1/2 iar raportul accelerațiilor gravitaționale 3/2. Știind că valoarea masei primului corp este M_1 se cere să se determine masa celuilalt corp ceresc M_2.

   R: $M_2 = M_1\dfrac{g_2}{g_1}\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2 = \dfrac{8}{3}\, M_1$.

8. Știind că raza Soarelui este R și densitatea medie a materiei solare este ρ_S, să se determine distanța Pămînt-Soare, dacă perioada de rotație a Pămîntului în jurul Soarelui este T.

   R: $d^3 = \dfrac{KR^3\rho_S}{3\pi} \cdot T^2$.

9. De pe o planetă cu raza $R = 1/8$ din raza Pămîntului, trebuie lansat un satelit artificial pe o orbită circulară la înălțimea $h = 600$ km. Știind că masa planetei este $m = 8 \cdot 10^{21}$ kg să se calculeze: *a)* viteza tangențială care trebuie imprimată satelitului; *b)* viteza unghiulară și *c)* perioada lui de rotație.

   R: $v = \sqrt{\dfrac{Km}{R + h}} \approx 0{,}6$ km/s; $\omega = \dfrac{v}{R + h} \approx 0{,}75 \cdot 10^{-3}$ rad/s; $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \approx 8\,320$ s.

4

ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ȘI A SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE

4.1. LUCRUL MECANIC EFECTUAT LA MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL ÎNTR-UN CÎMP DE FORȚE

4.1.1. **Noțiunea de lucru mecanic.** În activitatea sa fizică, omul întrebuințează fie propria sa forță musculară, fie aceea a animalelor de muncă sau a mașinilor, cu scopul de a pune în mișcare o unealtă, un vehicul prin învingerea unei alte forțe, care se opune mișcării, sau inerției.

Astfel, un muncitor acționează asupra unui cărucior deplasîndu-l (fig.4.1.). Forța $\vec{F}$ cu care acționează muncitorul asigură deplasarea cărucior ului învingînd forța de frecare.

În toate procesele în care se transmite mișcarea de la un corp la alt corp, un rol esențial îl joacă o mărime fizică numită *lucru mecanic.*

Măsura lucrului mecanic este legată de noțiunea de forță și de deplasarea punctului de aplicație al forței.

Se spune că o forță efectuează lucru mecanic cînd aceasta acționînd asupra unui corp își deplasează punctul de aplicație pe o anumită distanță.

4.1.2. **Lucrul mecanic al unei forțe constante al cărei punct de aplicație se deplasează pe suportul său.** Un corp ale cărui deplasări în spațiu sînt limi-

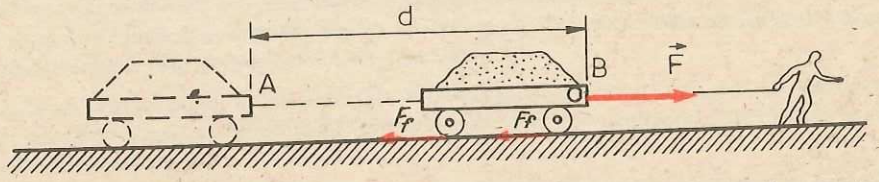
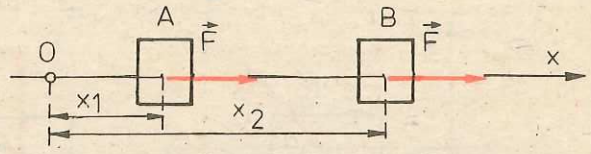


Fig. 4.1. Un om deplasează un cărucior pe un drum orizontal. Lucrul mecanic efectuat în timpul acestei deplasări este determinat de forța de tracțiune $\vec{F}$ și de deplasarea punctului de aplicație al acesteia pe distanța d.

Fig. 4.2. Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pentru o deplasare d a punctului său de aplicație pe suportul său este: $L = Fd$



tate de către alte corpuri de care este legat sau cu care este în contact, se numește corp supus la legături sau neliber. Exemple: o ușă fixată în balamale, o lustră fixată printr-o tijă de tavan, un vagon de tren care se mișcă pe șine.

Un corp care nu este legat de alte corpuri și care se poate deplasa în orice direcție din spațiu se numeste corp liber. Exemple: un balon care plutește în aer, un elicopter în timpul zborului.

Să considerăm un corp liber asimilat cu un punct material, care este acționat de o forță constantă $\vec{F}$ și care îl deplasează pe distanța d între două puncte A și B, de coordonate x_1 și x_2. Corpul fiind liber se deplasează pe direcția și în sensul forței (fig. 4.2).

Prin definiție, lucrul mecanic al unei forțe constante F, al cărei punct de aplicație se deplasează pe distanța d, în direcția și în sensul forței, este egal cu produsul dintre mărimea forței și mărimea deplasării:

$$L = Fd, \tag{4.1}$$

unde $d = x_2 - x_1$ este distanța dintre punctele A și B, între care se deplasează punctul de aplicație al forței.

Forța care produce mișcarea se numește *forță motoare,* iar forța care se opune mișcării se numește *forță rezistentă.* Lucrul mecanic al forței motoare se numește *lucru mecanic motor*, iar cel al forței rezistente se numește *lucru mecanic rezistent.*

Lucrul mecanic definit prin relația (4.1) se poate calcula și printr-o metodă grafică. Reprezentăm grafic variația forței $\vec{F}$ în funcție de distanță, $F = f(x)$, într-un sistem de coordonate FOx. Forța F, fiind constantă între x_1 și x_2 graficul funcției $f(x)$ este o dreaptă paralelă cu axa Ox (fig. 4.3). Produsul $F(x_2 - x_1) = Fd$, reprezintă aria suprafeței limitată de curba $F = f(x)$ de axa Ox și de segmentele perpendiculare pe axa Ox în punctele $A(x_1, 0)$ și $B(x_2, 0)$. Acest produs este egal cu lucrul mecanic efectuat de forță pe distanța AB.

Această metodă de aflare a lucrului mecanic este valabilă și în cazul în care forța F nu este constantă.

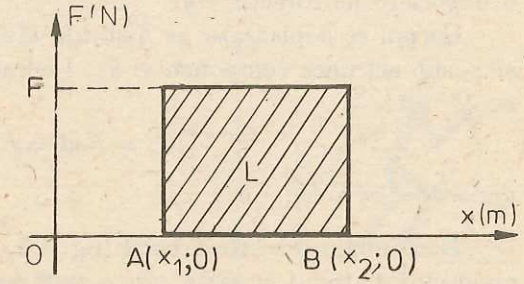


Fig. 4.3. Lucrul mecanic efectuat de forța constantă $\vec{F}$ pe distanța $d = x_2 - x_1$ este egal cu aria suprafeței hașurate.

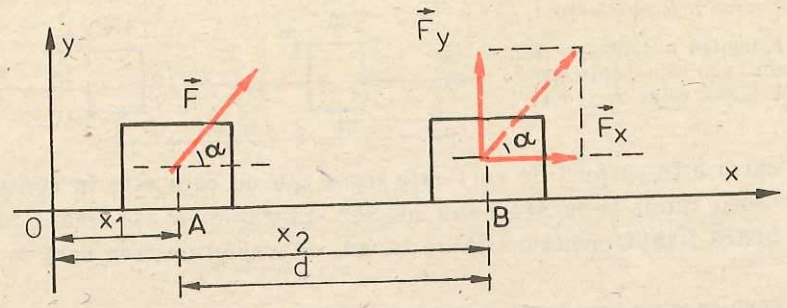


Fig. 4.4. Lucrul mecanic al forței $\vec{F}$, a cărei direcție este oblică în raport cu direcția deplasării, este egal cu produsul dintre componenta forței pe direcția deplasării și mărimea deplasării: $L = Fd \cos \alpha$.

Dacă în relația (4.1) se ia $F = 1$ N și $d = 1$ m se obține unitatea de lucru mecanic în SI, numită joule (J):

1 joule = 1 newton × 1 metru.

Un joule este lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 newton al cărei punct de aplicație se deplasează cu un metru pe suportul forței și în sensul forței.

4.1.3. **Lucrul mecanic al unei forțe constante a cărei direcție face un unghi cu direcția deplasării.** Să considerăm un corp, asimilat cu un punct material, supus la legături, care se poate deplasa pe direcția Ox, sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$, a cărei direcție face unghiul α cu direcția Ox.

Pentru calculul lucrului mecanic al forței $\vec{F}$, se poate folosi, și în acest caz, relația (4.1).

Se descompune forța $\vec{F}$ în două componente, după direcțiile perpendiculare Ox și Oy (fig. 4.4):

$$F_x = F \cos \alpha; \; F_y = F \sin \alpha. \tag{4.2}$$

Lucrul mecanic al componentei F_y este zero deoarece ea nu produce nici o deplasare pe direcția Oy.

Corpul se deplasează pe distanța d, între punctele A și B de abscise x_1 și x_2 sub acțiunea componentei F_x. Lucrul mecanic produs de această componentă este:

$$L = F_x d = Fd \cos \alpha, \tag{4.3}$$

unde $d = x_2 - x_1$.

Dacă unghiul α este ascuțit (fig. 4.5, *a*), forța $\vec{F}$ contribuie la deplasarea punctului material, aceasta este o *forță motoare* și efectuează un lucru mecanic motor; $\cos \alpha > 0$ deci $L = Fd \cos \alpha > 0$; pentru $\alpha = 0$, $L = Fd$ și pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $L = 0$.

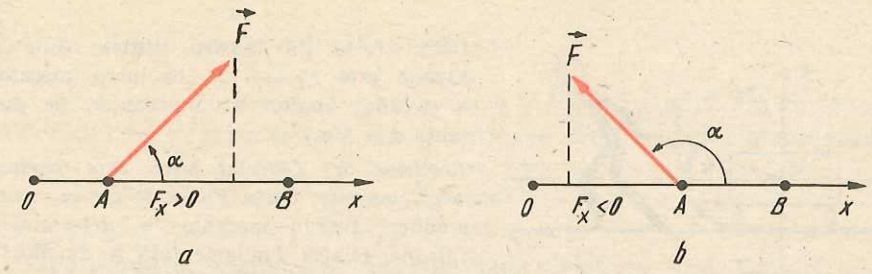


Fig. 4.5. Cînd forța $\vec{F}$ face un unghi $\alpha < \frac{\pi}{2}$ cu direcția deplasării, efectuează un lucru mecanic motor, $L > 0$; pentru $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ forța $\vec{F}$ efectuează un lucru mecanic rezistent, $L < 0$.

Dacă unghiul $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ (fig. 4.5, *b*), forța $\vec{F}$ se opune deplasării. $\vec{F}$ este o *forță rezistentă* și efectuează un lucru mecanic rezistent; în acest caz $\cos \alpha < 0$, deci $L = Fd \cos \alpha < 0$; pentru $\alpha = \pi$, $L = -Fd$.

EXEMPLE

1. Un om pune în mișcare, pe o suprafață orizontală, un corp cu masa $m = 20$ kg, acționînd asupra lui cu o forță $F = 50$ N, a cărei direcție face cu orizontala un unghi $\alpha = 37°$ ($\cos 37° = 0{,}8$). Acțiunea omului asupra corpului durează 3 secunde. Neglijînd forțele de frecare, să se calculeze lucrul mecanic efectuat de om asupra corpului.
Rezolvare. a) Calculul deplasării corpului. Vom calcula mai întîi accelerația corpului aplicînd relația fundamentală a dinamicii (fig. 4.6):

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}. \tag{4.4}$$

Proiectînd relația (4.4) pe direcția deplasării (pe direcția Ox), obținem:

$$F_x = F \cos \alpha = ma,$$

de unde:

$$a = \frac{50 \text{ N} \cdot 0{,}8}{20 \text{ kg}} = 2 \text{ m/s}^2.$$

În 3 secunde corpul s-a deplasat pe distanța

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 = 9 \text{ m}; \; v_0 = 0.$$

b) Calculul lucrului mecanic. Calculăm lucrul mecanic aplicînd relația (4.3):

$$L = Fd \cos \alpha = 50 \cdot 9 \cdot 0{,}8 = 360 \text{ J}.$$

2. Un copil trage o sanie de masă $m = 4$ kg, cu o forță $\vec{F}$ care face cu direcția deplasării un unghi α, imprimîndu-i o accelerație $a = 3$ m/s².

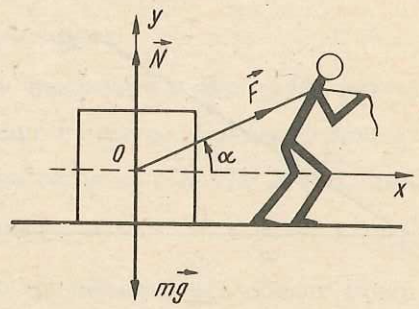


Fig. 4.6. La exemplul 1.

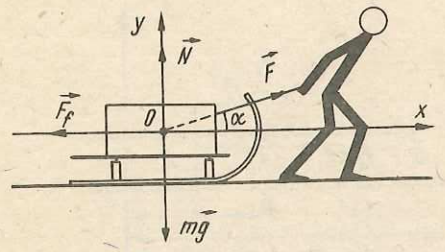


Fig. 4.7. La exemplul 2.

Dacă forţa de frecare dintre sanie şi zăpadă este $F_f = 5$ N, ce lucru mecanic a efectuat copilul asupra saniei, pe distanţa $d = 4$ m?

Rezolvare. a) Calculul forţei care produce lucrul mecanic. Forţa $F_x = F \cos \alpha$, care produce lucrul mecanic o determinăm aplicînd relaţia fundamentală a dinamicii, la mişcarea saniei (fig. 4.7):

$$\vec{F}_f + \vec{N} + \vec{F} + \vec{mg} = \vec{ma}. \qquad (4.5)$$

Proiectînd relaţia (4.5) pe direcţia deplasării, adică pe direcţia Ox, obţinem:

$$-F_f + F \cos \alpha = ma; \; F \cos \alpha = ma + F_f.$$

b) Calculul lucrului mecanic. Lucrul mecanic produs de forţa F este dat de relaţia:

$$L = (F_f + ma) \cdot d = (5 \text{ N} + 4 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}^2) \cdot 4 \text{ m} = 68 \text{ J}.$$

4.1.4. **Produsul scalar a doi vectori.** Vom defini o nouă operaţie cu vectori şi anume o operaţie de înmulţire a vectorilor.

Regulile de înmulţire a vectorilor sînt diferite de regulile de înmulţire a mărimilor scalare. Se pot defini două feluri de produse a doi vectori:

a) produsul scalar, al cărui rezultat este o mărime scalară;

b) produsul vectorial, al cărui rezultat este o mărime vectorială.

Produsul vectorial urmează să fie definit în capitolul 6 (§ 6.1); acum vom defini produsul scalar a doi vectori.

Să considerăm doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, orientaţi după direcţiile (D_1) şi (D_2) care fac între ei unghiul α (fig. 4.8).

Se numeşte produs scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ numărul real notat cu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, egal cu produsul modulelor celor doi vectori prin cosinusul unghiului dintre ei.

Astfel:

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha. \qquad (4.6)$$

Relaţia (4.6) se mai poate scrie şi astfel:

$$s = (a \cos \alpha)b = a(b \cos \alpha) = a_1 b = ab_1,$$

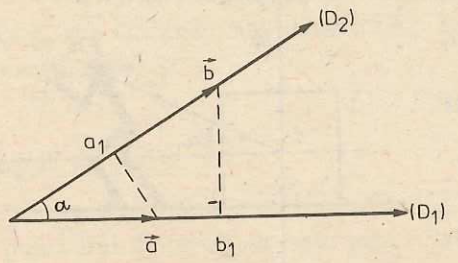


Fig. 4.8. Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este numărul real $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$.

unde $a_1 = a \cos \alpha$ reprezintă componenta vectorului $\vec{a}$ pe direcţia (D_2), iar $b_1 = b \cos \alpha$ este componenta lui $\vec{b}$ pe direcţia (D_1).

Prin urmare produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unuia dintre ei prin componenta celuilalt pe direcţia primului vector.

Analizînd relaţia (4.6) observăm că:

a) produsul scalar este zero, $(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$, cînd unul dintre vectori are modulul egal cu zero $(a = 0$ sau $b = 0)$, sau cînd vectorii sînt perpendiculari

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, \; \cos \frac{\pi}{2} = 0\right);$$

b) produsul scalar este maxim cînd vectorii sînt paraleli ($\alpha = 0$, $\cos 0 = 1$);

c) produsul scalar este comutativ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = ab \cos \alpha;$$

d) produsul scalar are şi proprietatea de distributivitate faţă de adunare:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Produsul scalar al unui vector prin el însuşi este dat de relaţia:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2; \; a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \qquad (4.7)$$

Aplicăm această proprietate a produsului scalar pentru a obţine modulul rezultantei a doi vectori. Notînd cu $\vec{c}$ suma vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, adică $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, şi făcînd produsul scalar al vectorului $\vec{c}$ prin el însuşi, obţinem:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2,$$

de unde

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha,$$

unde α este unghiul dintre cei doi vectori.

Notînd cu $\vec{d}$ vectorul diferenţă al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, adică $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, şi făcînd produsul scalar al vectorului $\vec{d}$ prin el însuşi, obţinem:

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2,$$

din care rezultă

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Ţinînd seamă de relaţia de definiţie a produsului scalar (4.6), putem spune că *lucrul mecanic al unei forţe constante $\vec{F}$, care-şi deplasează punctul de aplicaţie pe distanţa d este egal cu produsul scalar al vectorilor $\vec{F}$ şi $\vec{d}$*, deci

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \alpha. \qquad (4.8)$$

Dacă forţa şi deplasarea au acelaşi sens lucrul mecanic este pozitiv (lucru mecanic motor), iar dacă forţa şi deplasarea sînt de sensuri opuse lucrul mecanic este negativ (lucru mecanic rezistent).

Din proprietatea de distributivitate a produsului scalar, față de adunare, rezultă că lucrul mecanic al rezultantei $\vec{R}$ a unui sistem de forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ este egal cu suma lucrurilor mecanice ale forțelor componente:

$$L = \vec{R} \cdot \vec{d} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n) \cdot \vec{d} = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + ... + \vec{F}_n \cdot \vec{d};$$
$$L = L_1 + L_2 + ... + L_n.$$

4.1.5. **Lucrul mecanic al forței de greutate.** Să considerăm o regiune restrînsă din apropierea Pămîntului în care cîmpul gravitațional este uniform. În această regiune liniile de cîmp sînt drepte paralele, iar accelerația gravitațională este constantă, adică are în toate punctele aceeași mărime, direcție și sens. Greutatea unui punct material care se mișcă în acest cîmp rămîne constantă în tot timpul mișcării lui.

Într-un punct A al acestui cîmp, la înălțimea h față de suprafața Pămîntului, se află un corp de masă m, asimilat cu un punct material. Punctul material se poate deplasa de la nivelul A la nivelul B, pe verticală, sau urmînd unul dintre drumurile următoare: CD; $FGHIJKL$ sau NO (fig. 4.9).

Vom calcula lucrul mecanic al greutății corpului, cînd acesta cade liber pe verticală și apoi cînd corpul se deplasează pe planul înclinat CD, considerînd frecarea neglijabilă.

Lucrul mecanic al greutății pe distanța $AB = h$ este

$$L = mgh. \tag{4.9}$$

Lucrul mecanic al greutății corpului, cînd acesta se deplasează pe distanța $CD = l$, se poate calcula aplicînd formula (4.1). În acest scop, înlocuim greutatea cu componentele sale $G_t = G \sin \alpha$ pe planul înclinat și $G_n = G \cos \alpha$, normală pe planul înclinat.

Reacțiunea normală $\vec{N}$ a planului înclinat și forța componentă $\vec{G}_n$ nu efectuează lucru mecanic. Prin urmare, efectuează lucru mecanic numai forța componentă $\vec{G}_t$:

$$L = G_t l = mgl \sin \alpha = mgh, \tag{4.10}$$

deoarece $l \sin \alpha = h$.

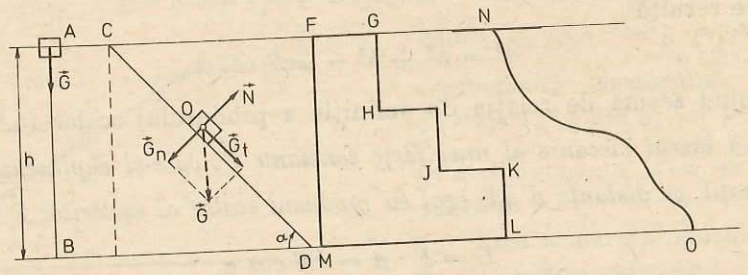


Fig. 4.9. Lucrul mecanic al greutății este egal cu produsul dintre modulul său prin diferența de nivel dintre punctul inițial și punctul final al drumului urmat de punctul său de aplicație (centrul de greutate): $L = mgh$.

Rezultă că:

lucrul mecanic al greutății este independent de drumul parcurs de punctul material și de legea mișcării acestuia și este egal cu produsul greutății prin diferența de nivel h, dintre poziția inițială și cea finală a punctului material.

Greutatea efectuează același lucru mecanic fie că se deplasează pe drumul AB, fie pe drumul $FG...KL$ sau pe drumul NO.

O forță care, acționînd asupra unui punct material, efectuează un lucru mecanic independent de drumul parcurs și de legea după care se mișcă punctul material și depinde numai de pozițiile punctelor extreme ale traiectoriei se numește *forță conservativă*. Exemple de forțe conservative: greutatea, forța elastică, forța electrostatică etc.

O regiune din spațiu, limitată sau nelimitată, unde în fiecare punct se face simțită acțiunea unei forțe determinată în modul, direcție și sens spunem că formează un cîmp de forțe. Cîmpul ale cărui forțe sînt conservative se numește *cîmp de forțe conservativ*. Cîmpul gravitațional este un exemplu de cîmp de forțe conservativ, nelimitat, creat în jurul unei mase gravitaționale. Forța care se face simțită în acest cîmp este forța de atracție gravitațională exercitată asupra corpurilor plasate în punctele cîmpului.

EXEMPLE

1. Se transportă un punct material de masă m, în cîmpul gravitațional uniform, pe drumul închis $FGH \ldots LMF$ (fig. 4.9). În timpul acestei deplasări asupra punctului material acționează mai multe forțe, printre care greutatea și forța de frecare. Să se calculeze lucrul mecanic al greutății și lucrul mecanic al forței de frecare pe acest drum închis.

Rezolvare. a) Calculul lucrului mecanic al greutății. Calculăm mai întîi lucrurile mecanice parțiale pe diferitele porțiuni de drum:

$L_{FG} = 0$, forța este perpendiculară pe deplasare;

$L_{GH} = mg \cdot GH$; $L_{HI} = 0$; $L_{IJ} = mg \cdot IJ$; $L_{JK} = 0$; $L_{KL} = mg \cdot KL$; $L_{LM} = 0$; $L_{MF} = -mg \cdot MF$, lucru mecanic rezistent.

Lucrul mecanic efectuat de greutate pe întreg drumul este egal cu suma lucrurilor mecanice parțiale:

$$L_{FF} = mg\,(GH + IJ + KL - MF) = 0,$$

deoarece segmentul MF este egal cu suma segmentelor GH, IJ și KL. Rezultă că lucrul mecanic al greutății pe un drum închis este egal cu zero.

b) Calculul lucrului mecanic al forței de frecare. În cazul exemplului prezentat în figura 4.9, forța de frecare este paralelă cu deplasarea și de sens opus mișcării. Deci, lucrul mecanic al forței de frecare este egal cu produsul dintre mărimea acestei forțe și lungimea drumului total parcurs de punctul material:

$$L_{Ff} = F_f \cdot (FG + HI + JK + LM + MF),$$

pe GH, IJ și KL forța de frecare fiind nulă.

Lucrul mecanic al forței de frecare depinzînd de lungimea drumului parcurs, rezultă că forța de frecare nu este o forță conservativă. Se spune că forța de frecare este o *forță disipativă*.

2. Un copil aruncă o minge cu masa $m = 100$ g pe verticală în sus și o prinde în punctul din care a fost aruncată. Mingea atinge înălțimea maximă $h_m = 5$ m. Să se calculeze lucrul mecanic al greutății în timpul urcării mingii la înălțimea h_m, la coborîrea mingii pe aceeași distanță și pe toată distanța parcursă de minge. Se va lua $g = 10$ m/s^2.

Rezolvare. a) Lucrul mecanic al greutății mingii, în timpul urcării acesteia, este un lucru mecanic rezistent, dat de relația:

$$L_u = -mgh_m = -5 \text{ J}.$$

b) În timpul coborîrii mingii, greutatea acesteia efectuează un lucru mecanic motor

$$L_c = mgh_m = 5 \text{ J}.$$

c) Lucrul mecanic al greutății, pe tot parcursul, este:

$$L = L_u + L_c = -5 \text{ J} + 5 \text{ J} = 0.$$

4.1.6. **Lucrul mecanic al forței elastice.** Am studiat lucrul mecanic al forțelor constante, însă în practică întîlnim foarte des forțe care variază în funcție de poziția corpului asupra căruia ele acționează. Un exemplu de astfel de forță este forța elastică:

$$F = -kx, \tag{4.11}$$

unde k este constanta elastică a resortului și x este deformarea resortului.

Forța elastică este egală și de sens opus forței deformatoare $F_1 = kx$.

În timpul deformării resortului, se deplasează pe distanța x, atît punctul de aplicație al forței deformatoare $\vec{F}_1$ cît și cel al forței elastice $\vec{F}$. Ambele forțe efectuează lucru mecanic. La întindere sau comprimare, lucrul mecanic al forței deformatoare $\vec{F}_1$ este un lucru mecanic motor, pe cînd cel al forței elastice $\vec{F}$ este un lucru mecanic rezistent. Aceste două lucruri mecanice sînt egale și de semn contrar.

Lucrul mecanic L, al unei forțe variabile $F = f(x)$, al cărei punct de aplicație se deplasează pe distanța AB (fig. 4.10, *a* și *b*), este egal cu aria S, a suprafeței limitată de curba $f(x)$, un segment din axa Ox și două ordonate (cele ale punctelor A_1 și B_1). Dacă în intervalul $[a, b]$ $f(x) \geqslant 0$, atunci aria S

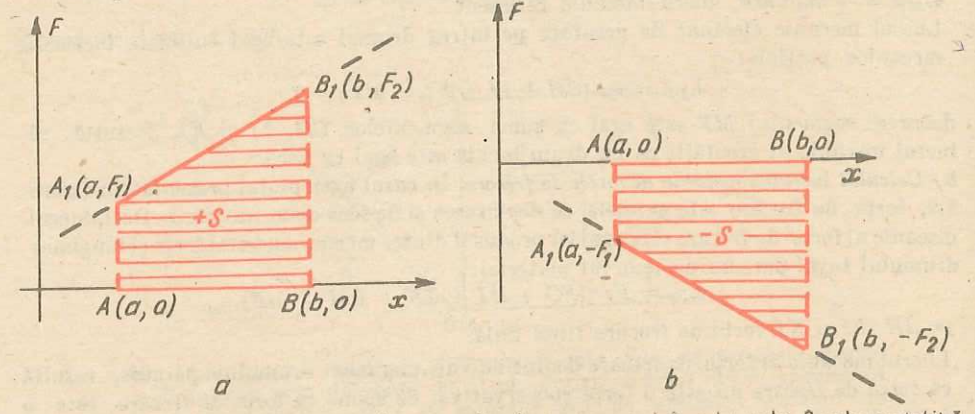


Fig. 4.10. *a)* Aria S este pozitivă dacă se află deasupra axei Ox; *b)* aria S este negativă dacă se află sub axa Ox.

este pozitivă, deci și lucrul mecanic este pozitiv (fig. 4.10, *a*), iar dacă $f(x) \leqslant 0$, atunci aria S este negativă, deci și lucrul mecanic este negativ (fig. 4.10, *b*).

Vom calcula lucrul mecanic al forței elastice $F = -kx$ folosind graficul de variație al acestei forțe în funcție de x, într-un sistem de coordonate FOx (fig. 4.11). Graficul funcției $F = -kx$ este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate.

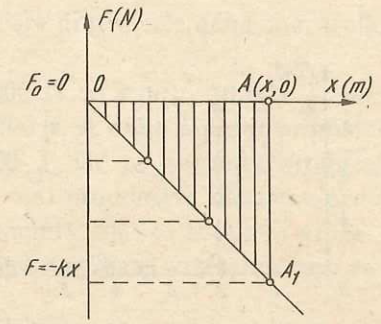


Fig. 4.11. Lucrul mecanic al forței elastice $F = -kx$, pentru $x \in [0, x]$ este egal cu aria suprafeței haşurate.

Lucrul mecanic al forței elastice este egal cu aria suprafeței limitată de dreapta $F = -kx$ și segmentele de dreaptă OA și AA_1, deci este egal cu aria triunghiului A_1AO:

$$L = \frac{AA_1 \cdot OA}{2} = -\frac{kx \cdot x}{2}.$$

Așadar:

$$L = -\frac{kx^2}{2}. \tag{4.12}$$

Din relația (4.12) rezultă că lucrul mecanic al forței elastice depinde numai de poziția punctului inițial și a celui final al drumului parcurs de punctul de aplicație al forței. Deci *forța elastică este o forță conservativă*. Forțele din interiorul resortului constituie un cîmp de forțe conservativ unidimensional.

EXEMPLE

1. O forță, care acționează asupra unui corp, variază în funcție de distanță după legea $F = 3x$, unde F este exprimată în newtoni și distanța x în metri. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forță între punctele $A(2, 0)$ și $B(6, 0)$.

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat de forță este egal cu aria suprafeței limitată de dreapta $F = 3x$, de segmentul AB și de ordonatele $F(x_1) = AA_1$ și $F(x_2) = BB_1$ (fig. 4.12). Prin urmare lucrul mecanic al forței $F = 3x$ este egal cu aria trapezului AA_1B_1B:

$$L = \frac{AA_1 + BB_1}{2} AB = \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2} (x_2 - x_1) = 48 \text{ J}.$$

Din relația de mai sus rezultă că lucrul mecanic al forței variabile $F = 3x$ poate fi calculat înmulțind media aritmetică a valorilor inițială și finală a forței cu deplasarea punctului de aplicație al forței.

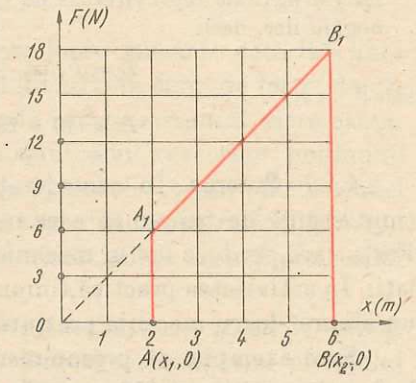


Fig. 4.12. La exemplul 1.

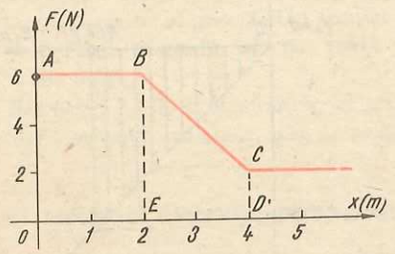


Fig. 4.13. La exemplul 2.

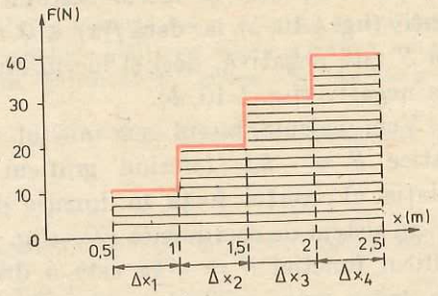


Fig. 4.14. Lucrul mecanic efectuat de forța variabilă F este: $L = \sum_i^n F_i \Delta x_i$.

2. O forță $\vec{F}$ ce se exercită asupra unui corp variază în funcție de deplasarea punctului său de aplicație după cum se arată în graficul din figura 4.13. Ce lucru mecanic efectuează forța pe intervalul [0 m; 4 m]?

Rezolvare. Lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este egal cu aria suprafeței *OABCDO*. Observăm că această suprafață se compune din: dreptunghiul *OABEO* și trapezul *EBCDE*. Valoarea lucrului mecanic căutat este egală cu suma ariilor dreptunghiului *OABEO* și trapezului *EBCDE*, deci:

$$L = OA \times OE + \frac{(BE + CD)}{2} ED,$$

$$L = 6\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} + \frac{(6\ \text{N} + 2\ \text{N})}{2} \cdot 2\ \text{m} = 20\ \text{J}.$$

3. O forță variabilă F acționează asupra unui punct material, deplasîndu-l pe o anumită distanță Δx. În figura 4.14 este reprezentată variația forței în funcție de distanță, $F = f(x)$. Să se calculeze lucrul mecanic total efectuat de către forța $\vec{F}$, între limitele între care variază x, și care sînt indicate pe figură.

Rezolvare. Lucrul mecanic total este egal cu aria suprafeței hașurate pe figură. Se împarte suprafața hașurată într-un număr de dreptunghiuri, de bază Δx_i, astfel ca pe intervalul Δx_i, forța să fie constantă.

Lucrul mecanic total efectuat de forța $\vec{F}$ este egal cu suma ariilor $F_i \Delta x_i$, a dreptunghiurilor, deci:

$$L = F_1 \Delta x_1 + F_2 \Delta x_2 + F_3 \Delta x_3 + F_4 \Delta x_4,$$

sau

$$L = (10 + 20 + 30 + 40) \cdot 0{,}5 = 50\ \text{J}.$$

4.1.7. **Puterea.** În considerațiile pe care le-am făcut pînă acum nu am ținut seamă de timpul în care o forță efectuează un anumit lucru mecanic. Forța care produce lucrul mecanic se poate datora unui motor sau unei instalații. În activitatea practică, timpul în care o instalație sau un motor efectuează un anumit lucru mecanic prezintă o deosebită importanță.

Spre exemplu, să presupunem că o macara ridică o sarcină de 5 000 N la 2 metri înălțime în 50 secunde, iar alta ridică o sarcină de 8 000 N la 3 metri înălțime în 60 secunde. Se pune întrebarea care dintre cele două macarale este mai productivă?

Prima efectuează lucrul mecanic $L_1 = 5\,000\ \text{N} \times 2\ \text{m} = 10\,000\ \text{J}$, iar într-o secundă produce un lucru mecanic de 200 J/s. A doua macara produce lucrul mecanic $L_2 = 8\,000\ \text{N} \times 3\ \text{m} = 24\,000\ \text{J}$, iar pe secundă produce lucrul mecanic de 400 J/s. A doua macara este mai productivă deoarece produce un lucru mecanic mai mare în timp de o secundă, deci ea este mai puternică decît prima. Puterea este o mărime care caracterizează viteza cu care se efectuează un lucru mecanic.

Prin definiție, *puterea medie într-un interval de timp* Δt *este egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat și timpul necesar producerii acestui lucru mecanic:*

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t}. \tag{4.13}$$

Am definit puterea medie deoarece, în general, lucrul mecanic nu se efectuează în mod uniform în timp.

În cazul cînd puterea este constantă, ea este dată de relația:

$$P = \frac{L}{t}. \tag{4.14}$$

Dacă în relația (4.14) se ia $L = 1$ joule și $t = 1$ secundă, se obține *unitatea pentru putere numită watt*, cu simbolul W:

$$1\ \text{watt} = \frac{1\ \text{joule}}{1\ \text{secundă}}; \qquad 1\ \text{W} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{s}}.$$

4.2. ENERGIA CINETICĂ. TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE A PUNCTULUI MATERIAL

4.2.1. **Noțiunea de energie.** Energia este o mărime fizică scalară ce caracterizează capacitatea unui corp sau a unui sistem de corpuri de a produce lucru mecanic.

Dacă un corp are capacitatea să efectueze lucru mecanic datorită unor factori mecanici cum ar fi schimbarea poziției lui într-un cîmp de forțe, deformației sale sau accelerării sale spunem că posedă *energie mecanică*. Spre exemplu, un corp în cădere poate acționa mecanismul unui ceasornic punîndu-l în mișcare (fig. 4.15). Apa zăgăzuită de un baraj poate acționa paletele unei turbine punînd în funcțiune un gater, o moară sau o hidrocentrală (fig. 4.16). Resortul comprimat, al unui pistol jucărie, prin destindere aruncă proiectilul la o anumită distanță.

Din exemplele date rezultă că un corp efectuează lucru mecanic numai dacă acesta trece dintr-o stare în alta. Astfel, resortul comprimat al pistolului jucărie efectuează lucru mecanic numai cînd acesta se destinde.

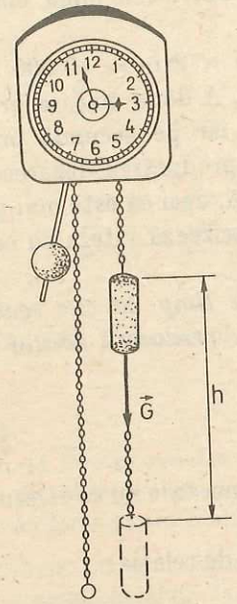


Fig. 4.15. Funcționarea ceasornicului reprezentat în figură este asigurată prin acțiunea unui corp în cădere asupra mecanismului său.

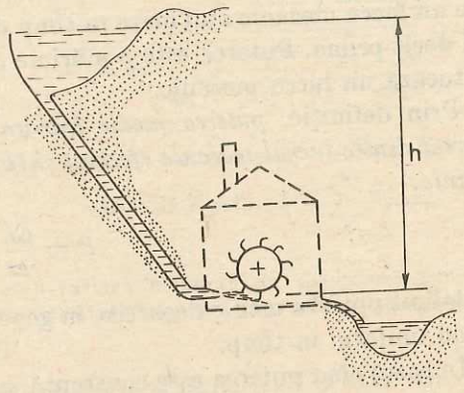


Fig. 4.16. Apa zăgăzuită de barajul unei hidrocentrale are înmagazinată în ea energie. Această apă poate acționa paletele unei turbine producînd un lucru mecanic.

Deoarece energia unui corp (sistem de corpuri) este legată de posibilitatea acestui corp (sistemului de corpuri) de a efectua lucru mecanic, este normal ca energia corpului (sistemului) să scadă cînd el efectuează lucru mecanic asupra altor corpuri și invers, să crească cînd se efectuează lucru mecanic asupra lui.

Fiecărei stări a corpului (sistemului) îi corespunde o energie, pe care o notăm cu E, iar la trecerea corpului (sistemului) din starea A în starea B energia variază cu valoarea:

$$\Delta E = E_B - E_A.$$

Variația ΔE (creșterea sau descreșterea) a energiei este măsurată prin lucrul mecanic efectuat în timpul acestei variații.

Energia este o mărime fizică de stare, caracterizînd corpul (sistemul) într-o stare staționară. Lucrul mecanic caracterizează corpul (sistemul) cînd acesta ia parte la procesul de trecere dintr-o stare A într-o stare B. Deci, lucrul mecanic este o mărime de proces.

Energia mecanică E, pe care o studiem în continuare, are două părți: *energia cinetică* E_c, sau energia de mișcare, și *energia potențială* E_p, numită și energie de poziție sau energie de configurație.

Energia are aceeași unitate de măsură ca și lucrul mecanic (joule; J).

4.2.2. **Energia cinetică a punctului material.** Corpurile în mișcare posedă energie, deoarece acționînd asupra altor corpuri le pot deplasa, deci pot să efectueze lucru mecanic.

Energia pe care o posedă un corp datorită mișcării sale (în raport cu un sistem de referință dat) se numește *energie cinetică*. Iată cîteva exemple de corpuri care posedă energie cinetică: vîntul, care reprezintă mișcarea unor mase de aer, prin acțiunea sa poate pune în mișcare o moară de vînt, o navă cu vele, poate smulge copacii din pămînt sau poate avaria clădiri cînd viteza sa depășește o anumită valoare; un ciocan în mișcare care lovește un cui și îl introduce într-un material oarecare; o apă curgătoare (apa unui rîu) care poate transporta pe suprafața sa plute făcute din trunchiuri de copac.

Energia cinetică a unui corp este definită prin lucrul mecanic pe care trebuie să-l efectueze acest corp din momentul frînării sale și pînă la oprirea sa, sau prin lucrul mecanic efectuat pentru a-i imprima o anumită viteză.

Să considerăm un punct material în mișcare rectilinie uniform variată sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$. Viteza punctului material variază pe distanța $d = x_2 - x_1$, dintre două puncte A și B de pe traiectorie, de la $\vec{v}_1$ la $\vec{v}_2$ (fig. 4.17). Legătura dintre cele două viteze este dată de formula lui Galilei:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ad. \tag{4.15}$$

Înlocuind în (4.15) accelerația a, prin valoarea sa dată de relația fundamentală a dinamicii $F = ma$, obținem:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fd. \tag{4.16}$$

Termenul Fd reprezintă lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ pe distanța $d = x_2 - x_1$, deci

$$L_{AB} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{4.17}$$

Din relația (4.17) rezultă că lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ care acționează asupra punctului material a contribuit la variația mărimii

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2, \tag{4.18}$$

numită prin definiție energia cinetică a punctului material.

Deci, *energia cinetică a unui corp de masă* m, *care se află în mișcare de translație cu viteza* v, *în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu semiprodusul dintre masa corpului și pătratul vitezei acestuia.*

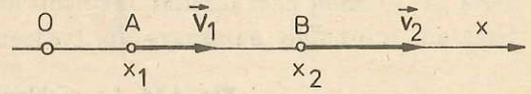


Fig. 4.17. Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pe distanța AB este egal cu variația energiei cinetice între punctele A și B.

Relația (4.17) exprimă teorema variației energiei cinetice pe care o enunțăm astfel:

variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații.

În concluzie, putem spune că energia cinetică a punctului material este o mărime care caracterizează mișcarea sa mecanică. Fiecărei stări de mișcare a punctului material îi corespunde o energie cinetică, iar la trecerea punctului material dintr-o stare de mișcare (*1*) într-o altă stare de mișcare (*2*) energia lui cinetică variază cu valoarea:

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}.$$

Modificarea stării de mișcare a punctului material se datorează forței rezultante care acționează asupra lui. Înseamnă că lucrul mecanic L al forței rezultante este o măsură a efectelor acestei forțe în procesele de modificare a stării de mișcare. Deci, lucrul mecanic al forței rezultante este egal cu variația energiei cinetice a punctului material:

$$L = E_{c2} - E_{c1}. \tag{4.19}$$

EXEMPLE

1. Un om deplasează un corp cu masa $m = 50$ kg, pe o suprafață orizontală cu viteza $v = 0{,}8$ m/s (fig. 4.18). Coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală este $\mu = 0{,}1$. Să se calculeze:
a) forța de tracțiune exercitată de om asupra corpului, aplicînd teorema variației energiei cinetice;
b) puterea medie dezvoltată de om. Se dă $g = 10$ m/s².

Rezolvare. a) Lucrul mecanic rezultant, efectuat de forțele $\vec{F}, \vec{F}_f, \vec{N}$ și $\vec{G}$ care acționează asupra corpului, este o măsură a efectelor forțelor, pentru procesele însoțite de schimbarea vitezei corpului. Cum viteza corpului nu se modifică, lucrul mecanic rezultant este nul:

$$L = (\vec{F} + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N}) \cdot \vec{d} = Fd - F_f d = 0. \tag{4.20}$$

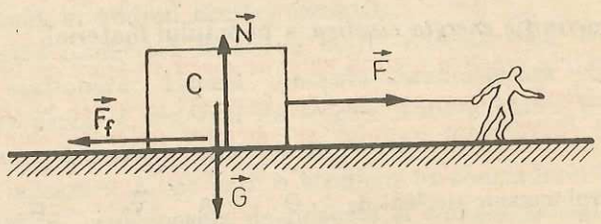


Fig. 4.18. La problema rezolvată.

Din relația (4.20) rezultă că lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este egal cu lucrul mecanic al forței $\vec{F}_f$ și de semn contrar. Aceste lucruri mecanice sînt o măsură a interacțiunii însoțite de modificarea poziției corpului. Cum corpul se deplasează, aceste lucruri mecanice sînt diferite de zero. Din relația (4.20) obținem:

$$F = F_f = \mu mg = 50 \text{ N},$$

b) Puterea medie este dată de relația

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{F \Delta x}{\Delta t} = F v_m.$$

Deoarece viteza este constantă, rezultă

$$P = Fv = 50 \cdot 0{,}8 = 40 \text{ W}.$$

2. Un automobil cu masa de 1 000 kg pornește din repaus și ajunge la viteza de 30 m/s după ce parcurge 500 m, pe un drum orizontal. Să se calculeze forța de tracțiune a motorului, dacă forța de frecare este de 200 N.

Rezolvare. Asupra automobilului acționează forțele: greutatea $\vec{G}$, reacțiunea normală $\vec{N}$, forța de tracțiune $\vec{F}$ și forța de frecare $\vec{F}_f$. Suma algebrică a lucrurilor mecanice ale forțelor ce acționează asupra automobilului pe distanța d este:

$$\Sigma L_i = Fd - F_f d.$$

Acest lucru mecanic fiind diferit de zero, el este folosit pentru accelerarea automobilului.
Aplicînd teorema variației energiei cinetice, obținem:

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = (F - F_f)d,$$

de unde

$$F = \frac{mv^2}{2d} + F_f = 1\,100 \text{ N}.$$

4.3. ENERGIA POTENȚIALĂ A PUNCTULUI MATERIAL ÎN CÎMP CONSERVATIV DE FORȚE. ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ÎN CÎMP CONSERVATIV DE FORȚE

4.3.1. Energia potențială a punctului material în cîmpul gravitațional. Considerăm un punct material de masă m plasat într-un punct A din cîmpul gravitațional al Pămîntului considerat uniform (fig. 4.19). Punctul material și Pămîntul, care interacționează prin cîmpul gravitațional, alcătuiesc un sistem fizic deformabil în cadrul căruia acționează forțe conservative (forțele de greutate). Configurația sistemului (starea sistemului) este determinată de înălțimea h a punctului material față de un plan orizontal P de la suprafața Pămîntului, luat ca nivel de referință. Spunem că înălțimea h este un parametru de stare al sistemului.

Lăsăm punctul material să cadă liber din punctul A în punctul A_0, aflat la înălțimea h_0. Lucrul mecanic efectuat de greutatea punctului material pe distanța $h - h_0$ este

$$L = mg(h - h_0). \tag{4.21}$$

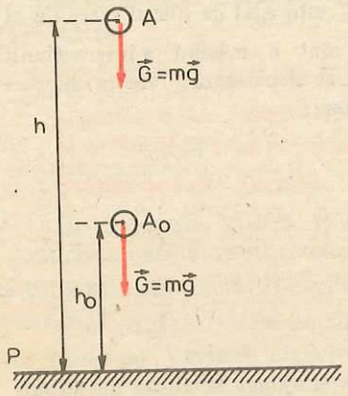


Fig. 4.19. Variația energiei potențiale a sistemului Pămînt-punct material, pentru deplasarea punctului material din A în A_0 este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic efectuat de greutate pe distanța AA_0: $\Delta E_p = -mg(h - h_0)$.

Astfel punctul material apropiindu-se de Pămînt poate efectua un lucru mecanic. Din acest motiv noi spunem că sistemul alcătuit din Pămînt și punctul material — sistem deformabil (cu interacțiune gravitațională) — posedă energie. Această energie, care depinde de poziția punctului material față de Pămînt, se numește energie de poziție sau *energie potențială gravitațională.*

Cu toate că energia potențială caracterizează starea sistemului Pămînt-punct material, datorită unei comodități de exprimare se spune adesea: energia potențială gravitațională a punctului material, lăsînd impresia că se face abstracție de rolul esențial al Pămîntului care generează cîmpul gravitațional.

Fiecărei configurații (stări) a sistemului îi corespunde o energie potențială E_p, iar modificarea configurației sistemului determină variația energiei potențiale. Astfel, dacă punctul material se deplasează din poziția inițială A, de altitudine h, în poziția finală A_0 de altitudine h_0 (fig. 4.19), energia potențială a sistemului suferă variația:

$$\Delta E_p = E_{p0} - E_p. \tag{4.22}$$

Energia potențială E_p a sistemului nu se poate determina în mod absolut, se pot măsura variațiile acestei energii, prin lucrul mecanic efectuat de către forțele de greutate.

Prin convenție, variația energiei potențiale între două stări (configurații date) este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al forțelor de greutate, exercitate asupra punctului material, între aceste stări, deci:

$$\Delta E_p = E_{p0} - E_p = -mg(h - h_0), \tag{4.23}$$

sau

$$E_{p0} - E_p = mgh_0 - mgh.$$

Dacă se alege starea căreia îi corespunde parametrul $h_0 = 0$, ca stare de referință și căreia i se atribuie energia potențială E_{p0}, atunci energia potențială a sistemului în starea corespunzătoare parametrului h va fi dată de relația:

$$E_p = mgh + E_{p0}. \tag{4.24}$$

Din relația (4.24) rezultă că energia potențială nu este total determinată, ea este determinată pînă la constanta arbitrară aditivă E_{p0}, căreia i se poate da în mod convențional valoarea zero. În acest caz

$$E_p = mgh. \tag{4.25}$$

Configurația (starea) pentru care s-a convenit să se ia energia potențială a sistemului egală cu zero $E_{p0} = 0$ se numește configurație zero (starea zero).

Alegerea configurației zero, adică a nivelului de referință pentru energia potențială, este cu totul arbitrară. În rezolvarea problemelor se ia drept configurație zero acea configurație în care energia potențială a sistemului este minimă și căreia i se atribuie în mod convențional valoarea zero.

EXEMPLE

1. În figura 4.20 se prezintă o porțiune a cîmpului gravitațional din apropierea unei planete. Se indică, de asemenea, valoarea energiei potențiale, pentru diferite configurații ale sistemului alcătuit dintr-un corp cu masa $m = 2$ kg și planetă (sistemul corp-planetă cu interacțiune gravitațională).
Să se calculeze:
a) lucrul mecanic necesar deplasării corpului din punctul A în punctul B, cu viteză constantă;
b) lucrul mecanic al greutății cînd corpul cade liber din punctul C pînă la suprafața planetei;
c) lucrul mecanic al greutății, efectuat în timpul deplasării corpului, cu viteză constantă, din punctul A în punctul D.

Rezolvare. a) Lucrul mecanic efectuat de forța externă sistemului, care deplasează corpul din A în B, este egal și de semn contrar cu lucrul mecanic al greutății, care la rîndul său este egal și de semn contrar cu diferența dintre energiile potențiale din stările B și A, deci:

$$L_{AB} = -L_{G(AB)} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -6 \text{ J}.$$

Pentru deplasarea corpului din A în B s-a cheltuit un lucru mecanic egal cu 6 J, iar energia potențială a sistemului a crescut cu 6 J.
b) Lucrul mecanic al greutății pe distanța CO este egal și de semn contrar cu diferența energiilor potențiale din stările O (sol) și C:

$$L_{G(CO)} = -(E_{pO} - E_{pC}) = -(0 - 8 \text{ J}) = 8 \text{ J}.$$

Prin deplasarea corpului din C în O, energia potențială a sistemului a scăzut cu 8 J.
c) Putem deplasa corpul din A în B pe unul din drumurile notate de la 1 la 4 pe figura 4.21. Greutatea fiind o forță conservativă, lucrul său mecanic nu depinde de drum. Indiferent ce drum am urma, pentru deplasarea corpului din A în D, lucrul mecanic al greutății este același. Alegînd drumul 1, adică drumul ABD, lucrul mecanic căutat este:

$$L_{G(AD)} = L_{G(AB)} + L_{G(BD)} = 6 \text{ J} + 0 = 6 \text{ J}.$$

Pe distanța BD greutatea nu efectuează lucru mecanic deoarece diferența de nivel dintre B și D este nulă.

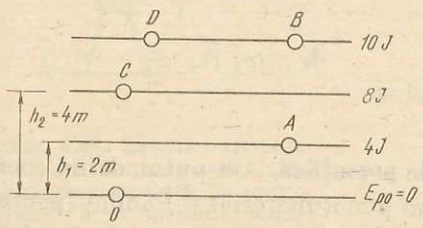


Fig. 4.20. La exemplul 1.

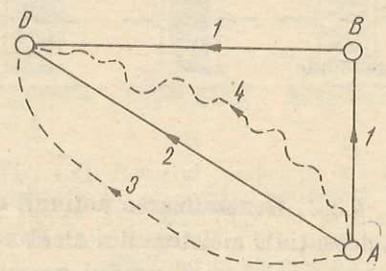


Fig. 4.21. La exemplul 1.

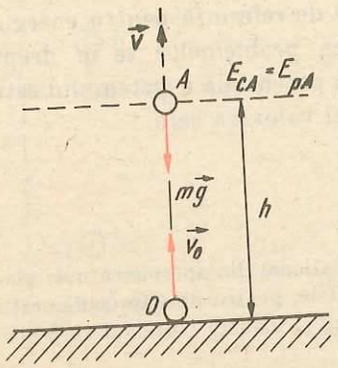


Fig. 4.22. La exemplul 3.

2. Un corp cu masa $m = 3$ kg cade liber de la înălțimea $h = 5$ m. Să se calculeze energia cinetică a corpului și energia potențială a sistemului corp-Pământ, cînd corpul se află la înălțimea $h_1 = 2$ m deasupra Pământului. Se va lua $g = 10$ m/s².

Rezolvare. Energia cinetică la înălțimea h_1 este:

$$E_c = \frac{mv_1^2}{2}, \text{ unde } v_1^2 = 2g(h - h_1),$$

deci

$$E_c = mg(h - h_1) = 90 \text{ J}.$$

Energia potențială a sistemului, cînd corpul se află la înălțimea h_1 față de Pământ, este:

$$E_p = mgh_1 = 60 \text{ J}.$$

Am considerat suprafața Pământului nivel zero pentru energia potențială.

3. Un corp este aruncat pe verticală în sus cu viteza $v_0 = 10$ m/s. La ce înălțime energia cinetică a corpului este egală cu energia potențială a sistemului corp-Pământ? Se va lua $g = 10$ m/s².

Rezolvare. a) Vom considera nivelul zero pentru energia potențială suprafața Pământului și nivelul la care energia cinetică este egală cu energia potențială, nivelul corespunzător punctului A (fig. 4.22).

Deci

$$E_{pA} = E_{cA} = \frac{mv^2}{2}. \tag{4.26}$$

Variația energiei potențiale între nivelele A și O (sol) este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al greutății pe distanța OA, deci:

$$E_{pA} - E_{pO} = -L_{G(OA)} = -(-mgh). \tag{4.27}$$

Am luat $L_G = -mgh$, deoarece L_G este un lucru mecanic rezistent.
Avînd în vedere relațiile (4.26) și (4.27), obținem:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}. \tag{4.28}$$

Variația energiei cinetice pe distanța OA este egală cu lucrul mecanic al greutății pe această distanță:

$$E_{cA} - E_{cO} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh. \tag{4.29}$$

Comparînd relațiile (4.28) și (4.29), obținem:

$$mgh - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh,$$

de unde

$$h = \frac{v_0^2}{4g} = 2{,}5 \text{ m}.$$

4.3.2. **Generalizarea noțiunii de energie potențială.** Am putut defini energia potențială a sistemului alcătuit dintr-un punct material și Pământ (pentru deplasări mici cînd cîmpul gravitațional este uniform) numai datorită faptului că în cadrul sistemului acționează forțe conservative (forțele de greutate). Deci, se poate defini energia potențială a oricărui sistem în care acționează forțe conservative: forțe gravitaționale; forțe elastice, datorate deformării temporare a unui solid; forțe electrostatice; forțe magnetice care se exercită între magneți permanenți.

Lucrul mecanic efectuat de către forțele conservative care acționează în sistem este egal și de semn opus cu variația energiei potențiale a acestuia

$$L = -(E_{p2} - E_{p1}) = E_{p1} - E_{p2},$$

unde E_{p1} este energia potențială a sistemului în stare inițială și E_{p2} este energia potențială a sistemului în stare finală.

În cazul sistemelor în care acționează forțe neconservative nu se poate defini o energie potențială. Spre exemplu, în sistemele în care acționează: forțele de presiune dintr-un gaz, forțe electromagnetice, forțe de frecare.

4.3.3. **Energia potențială în cîmpul forțelor elastice.** Să ne închipuim un arcaș care și-a încordat arcul (fig. 4.23). Pe coarda întinsă a arcului se sprijină o săgeată. Sistemul arc-săgeată are înmagazinat în el o energie mecanică, numită energie potențială elastică. Acest sistem este capabil să producă un lucru mecanic în momentul cînd se dă drumul corzii care aruncă săgeata spre țintă. Deci cînd sistemul își modifică configurația.

Să comprimăm un resort și să așezăm apoi pe el un corp (fig. 4.24). Cînd resortul este lăsat liber, el se destinde și se lansează corpul, efectuînd un lucru mecanic. Deci, resortul comprimat (același lucru și pentru resortul întins) posedă energie potențială elastică.

Energia potențială de deformare a unui corp elastic, spre exemplu energia potențială a unui resort elastic, depinde de poziția relativă a diferitelor părți ale acestui corp.

Variația energiei potențiale elastice a resortului este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al forțelor elastice. Deci, conform relației (4.12), obținem:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \tag{4.30}$$

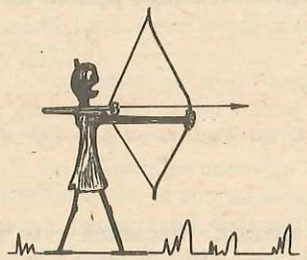


Fig. 4.23. Sistemul arc-coardă are înmagazinată în el energie potențială. Se va produce lucru mecanic numai dacă se dă drumul corzii care va arunca săgeata din arc.

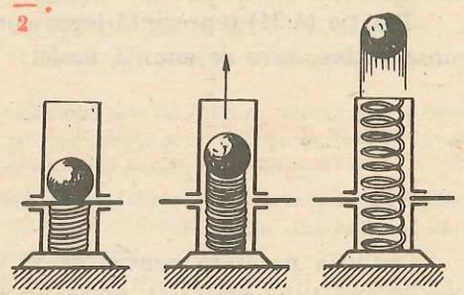


Fig. 4.24. Resortul comprimat are înmagazinată în el energie potențială. Dacă resortul este lăsat liber, el se destinde și lansează corpul care este așezat pe el, efectuînd lucru mecanic.

4.3.4. **Energia mecanică a punctului material în cîmp conservativ de forțe.** Fie un sistem alcătuit dintr-un punct material și un alt corp (presupus fix), interacționînd printr-un cîmp de forțe conservativ (spre exemplu cîmpul gravitațional). Presupunem că asupra sistemului nu acționează forțe provenind de la alte sisteme, adică, sistemul este izolat.

Considerăm că punctul material se deplasează în cîmp sub acțiunea forțelor cîmpului. În timpul deplasării punctului material se produce o variație continuă atît a energiei cinetice cît și a energiei potențiale a sistemului. Astfel la momentul $t_0 = 0$, sistemul posedă energia cinetică E_{c0} și energia potențială E_{p0}, iar la momentul t posedă energia cinetică E_c și energia potențială E_p.

Conform teoremei variației energiei cinetice $L = E_c - E_{c0}$ și a definiției energiei potențiale $L = -(E_p - E_{p0})$, unde L este lucrul mecanic al forței rezultante aplicată punctului material în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$, deci:

$$L = E_c - E_{c0} = -(E_p - E_{p0}),$$

de unde

$$E_c + E_p = E_{c0} + E_{p0}. \tag{4.31}$$

Din relația (4.31) rezultă că în timpul modificării configurației unui sistem fizic izolat, în care acționează forțe conservative, suma

$$E = E_p + E_c, \tag{4.32}$$

numită *energia mecanică* a sistemului, are o valoare constantă pentru orice stare (configurație) a sistemului.

4.4. CONSERVAREA ENERGIEI MECANICE

Relația (4.31) reprezintă legea conservării energiei mecanice pentru forțe conservative, care se enunță astfel:

energia mecanică, $E = E_c + E_p$, a unui sistem izolat în care acționează forțe conservative este constantă, deci energia mecanică a acestui sistem se conservă.

Condiția necesară pentru ca să se conserve energia mecanică este ca asupra punctului material, respectiv în sistem, să nu acționeze nici o forță neconservativă. Aceasta implică ca forțele de frecare să fie nule, iar sistemul să nu cuprindă mașini termice sau mașini electrice.

4.4.1. **Conservarea energiei mecanice în mișcarea de cădere liberă.** Fie un punct material de masă m, plasat într-un punct A din cîmpul gravitațional uniform al Pămîntului. Considerăm sistemul fizic Pămînt-punct material, izolat.

Energia mecanică a sistemului, cînd punctul material se află în punctul A, este

$$E_A = E_{pA} + E_{cA} = mgh,$$

deoarece $E_{cA} = 0$, punctul material fiind imobil în A (fig. 4.25).

În A se lasă punctul material să cadă liber; el ajunge în punctul B cu viteza

$$v_B = \sqrt{2gx},$$

unde $x = AB$.

Energia mecanică a sistemului, cînd punctul material se află în B, este

$$E_B = E_{pB} + E_{cB} = mg(h - x) + mgx = mgh,$$

deoarece $E_{cB} = \frac{mv_B^2}{2} = mgx$.

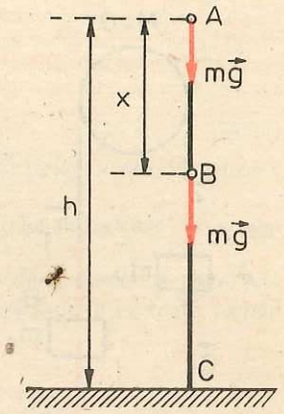


Fig. 4.25. În timpul mișcării unui punct material în cîmpul gravitațional, energia mecanică este constantă.

Energia mecanică a sistemului este constantă în timpul căderii libere a punctului material. În timpul acestei mișcări variază atît energia cinetică cît și energia potențială a sistemului.

4.5. SISTEME DE PUNCTE MATERIALE. FORȚE INTERNE ȘI FORȚE EXTERNE

4.5.1. **Sistem mecanic.** Corpurile și sistemele de corpuri din natură pot fi descrise din punct de vedere al echilibrului și al mișcărilor lor relative, precum și din punctul de vedere al interacțiunilor care influențează aceste mișcări, ca *sisteme de puncte materiale* între care, în general, se exercită anumite forțe de interacțiune. De exemplu, sistemul solar poate fi considerat în primă aproximație ca un sistem de puncte materiale (planetele și Soarele ale căror dimensiuni sînt mici în comparație cu distanțele reciproce) între care se exercită forțele de interacțiune gravitaționale. Un atom poate fi considerat ca un sistem de particule (nucleu și electroni) considerate puncte materiale, între care se exercită forțe electrice de atracție (nucleu — electroni) sau de respingere (electron — electron).

Tot astfel, un corp oarecare poate fi descompus mintal într-un număr foarte mare de elemente de volum foarte mici care pot fi aproximate prin puncte materiale. Aproximația este bună dacă luăm aceste elemente de volum suficient de mici.

Prin *sistem mecanic* vom înțelege un *sistem de puncte materiale* care nu sînt independente între ele, ci supuse la legături reciproce, astfel că formează un „întreg" mai mult sau mai puțin stabil, mai mult sau mai puțin deformabil.

Sistemul mecanic este un *model al realității* care reflectă mai mult sau mai puțin exact proprietățile mecanice ale corpurilor reale.

4.5.2. **Sistem material.** Mai general, prin sistem material se înțelege orice porțiune din Univers, bine delimitată fie prin frontiere naturale fie mintal, pe care o considerăm și o studiem la un moment dat.

Astfel, un sistem material poate fi: o planetă, o piatră, o mașină, gazul dintr-un vas, sistemul de corpuri reprezentat în figura 4.26, alcătuit din două corpuri legate de capetele unui fir trecut peste un scripete etc.

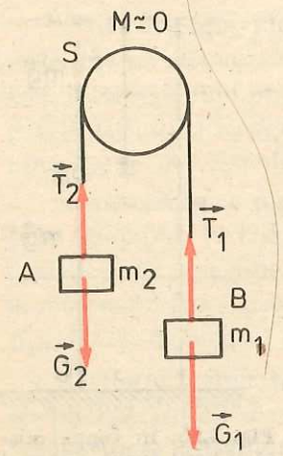


Fig. 4.26. Sistemul material este alcătuit din corpurile A și B legate de capetele unui fir trecut peste un scripete cu masa neglijabilă. Asupra sistemului acționează forțele externe $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ și forțele interne $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$.

Sistemul material este deformabil dacă distanțele dintre părțile sale componente sînt variabile. De exemplu un resort, sistemul solar, sistemul reprezentat în figura 4.26.

Sistemul material este nedeformabil sau rigid dacă distanțele reciproce dintre elementele care îl alcătuiesc nu se modifică în procesul mișcării mecanice.

4.5.3. **Forțe externe.** Odată sistemul ales și bine precizat, interacțiunea cu restul Universului este luată în considerare prin forțele exercitate de acesta, numite *forțe externe.*

Forțele externe sînt forțele exercitate asupra sistemului din partea corpurilor exterioare care nu fac parte din sistemul considerat.

Vom nota forțele interne cu litera $\vec{\mathcal{F}}$ rond cu indici, de exemplu, dacă considerăm sistemul Luna — Pămînt supus atracției Soarelui (fig. 4.27), atunci prin $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ am reprezentat rezultantele forțelor externe care se exercită asupra Lunii, respectiv Pămîntului.

4.5.4. **Forțe interne.** Asupra fiecărei particule (părți) din sistem se exercită atît forțe externe din partea corpurilor care nu fac parte din sistem cît și forțe interne din partea tuturor celorlalte particule (părți) din sistem.

Vom nota forțele interne cu litera $\vec{\mathcal{F}}$ rond, cu indici. Forțele interne sînt forțele de interacțiune dintre punctele materiale (părțile) ale sistemului considerat.

Să analizăm din nou sistemul Lună — Pămînt (fig. 4.27), în care am notat cu $\vec{\mathcal{F}}_{12}$, $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ forțele interne. Forța $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ este forța exercitată de Pămînt asupra Lunii, iar $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ este forța exercitată de Lună asupra Pămîntului. Conform principiului al treilea al dinamicii forțele interne $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ și $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ sînt egale în modul și de sens opus:

$$\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21};\quad \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0.$$

Rezultanta tuturor forțelor interne din sistem este nulă.

4.5.5. **Teorema variației energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale.** Pentru un punct material, energia cinetică are expresia

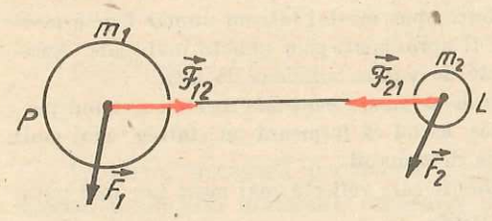


Fig. 4.27. Forțele interne care se exercită între punctele materiale ale unui sistem mecanic sînt două cîte două egale în modul și de sens opus (acțiunea și reacțiunea) $\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21}$, de aceea rezultanta lor este nulă: $\vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0$.

$$E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

Pentru un sistem de puncte materiale, energia cinetică este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor din sistem:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2. \qquad (4.33)$$

Vom enunța, fără a o demonstra, teorema variației energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale.

Între două momente date (t_1 și t_2) variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor, atît interioare cît și exterioare, care acționează asupra punctelor materiale din sistem.

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{\text{int.}} + L_{\text{ext.}}. \qquad (4.34)$$

În cazul sistemului deformabil, lucrul mecanic al forțelor interioare este, în general, diferit de zero.

În cazul unui solid indeformabil, lucrul mecanic al forțelor interioare este egal cu zero.

Variația energiei cinetice a unui solid indeformabil între două momente date este egală cu suma lucrurilor mecanice efectuate între aceste momente de către toate forțele exterioare care acționează asupra solidului.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un punct material de masă m alunecă fără frecare pe o suprafață curbă AB (fig. 4.28). Să se determine viteza punctului material în punctul B, dacă mișcarea se face fără viteză inițială.

Rezolvare. Sistemul alcătuit din punctul material și Pămînt (interacționînd prin cîmpul gravitațional) este acționat numai de forțe conservative. Energia mecanică a sistemului în starea A este egală cu energia mecanică a sistemului în starea B:

$$\frac{mv_A^2}{2} + E_{pA} = \frac{mv_B^2}{2} + E_{pB}.$$

Luînd nivelul B, ca nivel de referință pentru energia potențială gravitațională și ținînd seamă că $v_A = 0$, obținem:

$$mgh = \frac{1}{2} mv_B^2,$$

deci

$$v_B = \sqrt{2gh}.$$

2. Un corp de masă $m = 1$ kg este lăsat să cadă liber de la înălțimea $h = 2$ m, pe un resort cu constanta elastică $k = 200$ N/m (fig. 4.29). Să se calculeze viteza cu care corpul ciocnește resortul și deformarea x a resortului.

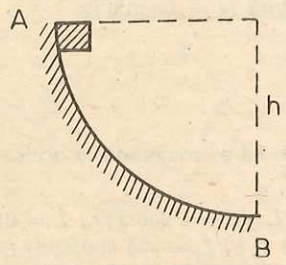


Fig. 4.28. La problema rezolvată 1.

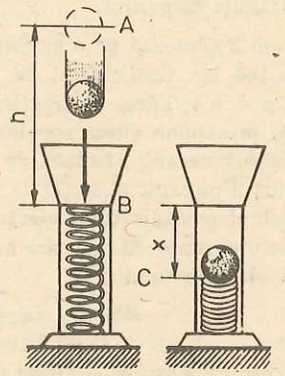


Fig. 4.29. La problema rezolvată 2.

Rezolvare. În sistemul alcătuit din corp, resort și Pămînt acționează două forțe conservative: forța de greutate și forța elastică. Considerăm ca nivele de referință, nivelul B pentru energia potențială elastică și nivelul C pentru energia potențială gravitațională.

Energia mecanică totală la nivelele A, B și C este:

$$E_A = mg(h + x);\ E_B = mgx + \frac{1}{2} mv^2;\ E_C = \frac{1}{2} kx^2. \qquad (4.35)$$

Sistemul fiind izolat aceste energii mecanice sînt egale.

Pentru calculul vitezei la nivelul B folosim primele două relații (4.35) și obținem:

$$mg(h + x) = mgx + \frac{1}{2} mv^2,$$

de unde

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Pentru calculul vitezei vom considera $g = 10$ m/s².

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2} = 6{,}32 \text{ m/s}.$$

Pentru calculul deformării x a resortului vom folosi prima și ultima relație (4.35) și obținem:

$$mg(h + x) = \frac{1}{2} kx^2,$$

sau

$$10x^2 - x - 2 = 0,$$

de unde

$$x = 0{,}5 \text{ m}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Ce lucru mecanic efectuează forța centripetă în timpul unei rotații complete, într-o mișcare circulară uniformă?

R: $L = 0 (\vec{F} \perp \vec{v})$.

2. Un corp se deplasează cu o viteză constantă pe un drum orizontal. Forța rezultantă care acționează asupra corpului este nulă. Se efectuează lucru mecanic asupra corpului? Justificați răspunsul.

3. Un om deplasează pe o suprafață orizontală, pe distanța $d = 10$ m, o ladă cu masa $m = 100$ kg. Coeficientul de frecare dintre ladă și suprafața pe care se deplasează este $\mu = 0{,}4$. Forța de tracțiune are direcția orizontală ($g = 10$ m/s²).

1° Se presupune viteza constantă. Să se calculeze:

a) lucrul mecanic efectuat de om asupra lăzii;

b) lucrul mecanic al forței de frecare;

c) lucrul mecanic total efectuat asupra lăzii.

2° Se presupune că lada are acceleràția $a = 0{,}5$ m/s². Să se răspundă la aceleași întrebări ale punctului 1°.

R: 1° *a)* $L_0 = \mu mgd = 4\,000$ J; *b)* $L_r = -4\,000$ J; *c)* $L = 0$;

2° *a)* $L_0 = (\mu mg + ma)d = 4\,500$ J; *b)* $L_r = -4\,000$ J; *c)* $L = 500$ J.

4. Un corp cu masa $m = 20$ kg se deplasează cu viteză constantă pe distanța $d = 60$ m, pe o suprafață orizontală. Coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}45$. Forța aplicată corpului face un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala. Să se calculeze:

a) forța aplicată corpului;

b) lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune asupra corpului ($g = 10$ m/s²).

R: *a)* $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} \approx 83$ N, *b)* $L = Fd \cos\alpha \approx 4\,287$ J.

5. Asupra unui corp acționează o forță $F = 24$ N, care face un unghi $\alpha = 37°$ cu orizontala. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța F pe o distanță $d = 20$ m. Frecările sînt neglijabile ($\cos 37° = 0{,}8$).

R: $L = Fd \cos\alpha = 384$ J.

6. Doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ au mărimile, respectiv $a = 4$ unități convenționale și $b = 8$ unități convenționale. Să se calculeze produsul scalar al celor doi vectori, luînd pentru unghiul α dintre cei doi vectori valorile: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$.

R: 32, $16\sqrt{3}$, $16\sqrt{2}$, 0, -1. (În unități convenționale corespunzătoare.)

7. Să se demonstreze că produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se poate scrie astfel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y,$$

unde (a_x, a_y) și (b_x, b_y) sînt componentele vectorilor pe două axe de coordonate perpendiculare Ox, Oy situate în planul determinat de cei 2 vectori.

8. Să se efectueze produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ reprezentați în figura 4.30, *a*, *b* și *c*. Mărimile vectorilor sînt indicate pe grafic în unități convenționale.

R: *a)* 4,24; *b)* $-4{,}596$; *c)* -6 (În unități convenționale corespunzătoare.)

9. O macara ridică un corp cu masa $m = 300$ kg la înălțimea $h = 5$ m. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de macara în cazurile următoare:

a) corpul este ridicat cu viteză constantă;

b) corpul este ridicat cu accelerația $a = 2$ m/s² ($g = 10$ m/s²).

R: *a)* $L = mgh = 15 \cdot 10^3$ J; *b)* $L = m(g + a)h = 18 \cdot 10^3$ J.

10. Un copil aruncă o minge cu masa $m = 100$ g care se urcă la înălțimea $h = 20$ m. Să se calculeze lucrul mecanic al greutății mingii. Se va lua $g = 10$ m/s².

R: $L = -mgh = -20$ J.

11. Un corp cu masa m se deplasează dintr-un punct A într-un punct C, în cîmpul gravitațional terestru, pe traseul ABC, indicat în figura 4.31. Să se demonstreze că lucrul mecanic efectuat de greutate este egal cu zero.

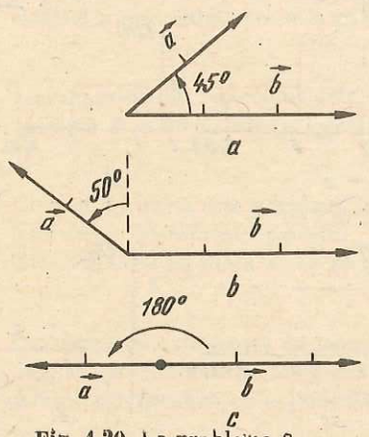


Fig. 4.30. La problema 8.

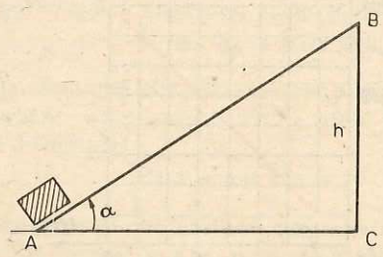


Fig. 4.31. La problema 11.

12. În timp ce un alpinist escaladează peretele vertical al unui munte, un turist de aceeași greutate ca și alpinistul urcă în vîrful muntelui pe o cărare în serpentină și ajunge în același loc ca și alpinistul. Care dintre cei doi a efectuat un lucru mecanic mai mare împotriva gravitației?

R: Efectuează același lucru mecanic.

13. În figura 4.32 este reprezentată dependența alungirii unui resort de mărimea forței deformatoare. Să se calculeze lucrul mecanic al forței deformatoare între punctele de abscise 0 cm și 8 cm. Să se spună care este sensul fizic al tangentei unghiului α și al ariei triunghiului de sub segmentul OA de pe grafic.

R: $\operatorname{tg}\alpha = k$, $L = Fx/2 = 32$ J.

14. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a întinde, cu $\Delta l = 0{,}5$ cm, un resort cu constanta elastică $k = 40$ kN/m?

R: $L = k(\Delta l)^2/2 = 0{,}5$ J.

15. Pentru a întinde un resort cu $\Delta l_1 = 4$ mm, trebuie să se efectueze un lucru mecanic $L_1 = 0{,}02$ J. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a întinde resortul cu $\Delta l_2 = 4$ cm?

R: $L_2 = L_1(\Delta l_2/\Delta l_1)^2 = 2$ J.

16. Un motor cu puterea $P = 10$ kW este folosit pentru a ridica o sarcină cu masa $m = 500$ kg la înălțimea $h = 40$ m. În cît timp va ridica motorul sarcina respectivă? ($g = 10$ m/s².)

R: $t = mgh/P = 20$ s.

17. În figurile 4.33, *a*, *b*, *c* și *d* sînt reprezentate dependențele de distanță ale forței F care acționează asupra unui corp. Să se calculeze lucrul mecanic al forței în fiecare caz.

R: *a)* 180 J; *b)* 60 J; *c)* 150 J; *d)* 2,5 J.

18. Să se calculeze puterea minimă a unui automobil pentru a se deplasa cu viteza constantă $v = 100$ km/h, dacă forța de frecare care acționează asupra automobilului este $F_f = 1{,}8 \cdot 10^3$ N.

R: $P = F_f v = 5 \cdot 10^4$ W.

19. Punctul de aplicație al unei forțe $F = 2{,}35$ N se deplasează cu viteză constantă $v = 0{,}456$ m/s, pe direcția forței. Care este puterea pusă în joc în această deplasare?

R: $P = Fv = 1{,}07$ W.

20. Depinde energia cinetică de sistemul de referință în raport cu care se calculează?

R: Da.

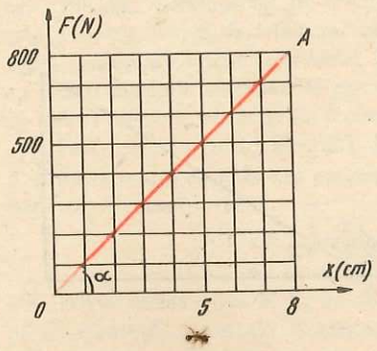


Fig. 4.32. La problema 13.

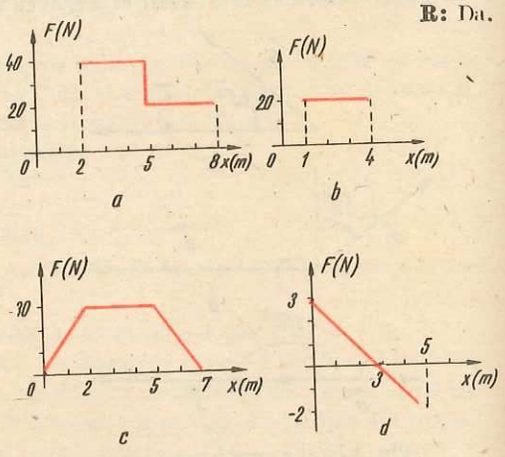


Fig. 4.33. La problema 17.

21. Un om stă pe o bancă într-un autobuz care se deplasează cu viteza $v = 15$ m/s. Masa omului este $m = 70$ kg. Care este energia cinetică a omului în raport cu ceilalți pasageri? Dar în raport cu Pămîntul?

R: $E_{1c} = 0$; $E_{2c} = 7\,875$ J.

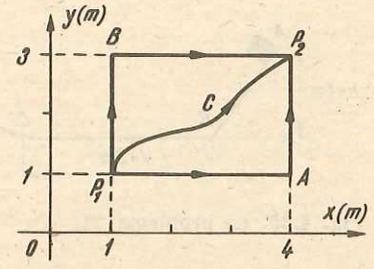


Fig. 4.34. La problema 24.

22. Un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg este aruncat vertical în sus cu viteza $v_0 = 4$ m/s. Să se calculeze: lucrul mecanic al greutății, variația energiei potențiale și variația energiei cinetice la urcarea corpului pînă la înălțimea maximă.

R: $L_G = -mv_0^2/2 = -4$ J; $\Delta E_p = 4$ J; $\Delta E_c = -4$ J.

23. O săgeată cu masa $m = 50$ g este lansată, dintr-un arc, cu viteza $v_0 = 30$ m/s pe verticală în sus. Să se calculeze energia cinetică și energia potențială a săgeții după un timp $t = 2$ s de la lansare. Se va lua $g = 10$ m/s².

R: $E_p = mg(v_0 t - gt^2/2) = 20$ J; $E_c = m(v_0 - gt)^2/2 = 2{,}5$ J.

24. Un corp cu masa $m = 2$ kg se deplasează din punctul P_1 în punctul P_2 în cîmpul gravitațional uniform, în care g este constant și egal cu 10 m/s² (fig. 4.34).

a) Să se calculeze lucrul mecanic al greutății pe traiectoriile P_1AP_2 și P_1BP_2.

b) Dacă se presupune energia potențială a sistemului corp-Pămînt nulă în P_1, care va fi valoarea sa în P_2?

c) Ce valoare are lucrul mecanic efectuat de cîmp pe traiectoria P_1CP_2?

d) Care este valoarea energiei potențiale în punctul de coordonate $x = 1$ m și $y = 3$ m?

R: $L_1 = -40$ J; $L_2 = -40$ J; *b)* $E_p = 40$ J; *c)* $L = -40$ J; *d)* $E_p = 40$ J.

25. Cu cît trebuie alungit un resort cu constanta elastică $k = 20$ N/m pentru ca energia înmagazinată în resort să fie $E_p = 14{,}4$ J?

R: $x = \sqrt{2E_p/k} = 1{,}2$ m.

26. Un corp cu masa $m = 2$ kg alunecă pe o suprafață orizontală fără frecare. Corpul ciocnește un resort pe care-l comprimă cu $x = 0{,}5$ m, înainte de a se opri. Constanta elastică a resortului este $k = 20$ N/m. Care este viteza corpului înainte de ciocnire?

R: $v = x\sqrt{k/m} = 1{,}58$ m/s.

27. La comprimarea resortului unui pistol jucărie cu $x = 3$ cm s-a acționat cu o forță maximă $F = 20$ N. Să se calculeze energia potențială a resortului comprimat.

R: $E_p = Fx/2 = 0{,}3$ J.

28. Un pistol jucărie este prevăzut cu un resort de constantă elastică $k = 800$ N/m. La încărcarea pistolului, resortul a fost comprimat cu $x = 5$ cm. Cu ce viteză este lansat glonțul cu masa $m = 20$ g, pe direcția orizontală?

R: $v = x\sqrt{k/m} = 10$ m/s.

29. Un vagon de cale ferată cu masa $m = 20$ tone ciocnește un obstacol cu viteza $v = 0{,}2$ m/s. Resorturile tampoanelor se comprimă fiecare cu $x = 4$ cm. Să se determine forța maximă ce acționează asupra resorturilor.

R: $F = mv^2/2x = 10$ kN.

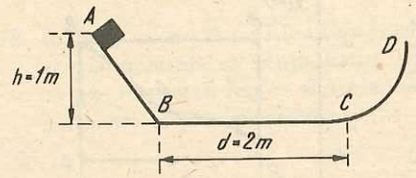


Fig. 4.35. La problema 31.

30. Asupra unui corp acționează o forță care variază cu distanța după legea: $F = 50 - 0{,}5\ x$, unde x este exprimat în metri și F în newtoni. Să se calculeze lucrul mecanic al forței, cînd punctul său de aplicație se deplasează între punctele de abscise $x_0 = 0$ m și $x = 20$ m.

R: $L = \dfrac{F(x) + F(x_0)}{2}(x - x_0) = 900$ J.

31. Un corp cu masa m (= 2 kg) coboară fără frecare pe un plan înclinat de înălțime $h = 1$ m. Ajungînd la baza planului, corpul se deplasează cu frecare pe o suprafață plană pînă într-un punct C, parcurgînd distanța $d = 2$ m. Coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}3$. În punctul C, corpul urcă fără frecare, pe o suprafață curbă CD (fig. 4.35). Să se calculeze:

a) viteza v_1 a corpului la baza planului înclinat;

b) viteza v_2 a corpului în punctul C;

c) înălțimea h_1 la care urcă corpul pe suprafața CD.

d) Să se determine poziția punctului în care se oprește corpul (pe suprafața plană), față de punctul B. Se va lua $g = 9{,}8$ m/s².

R: *a)* $v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}47$ m/s; *b)* $v_2 = \sqrt{2g(h - \mu d)} = 2{,}8$ m/s;
c) $h_1 = h - \mu d = 0{,}4$ m; *d)* $d_1 = 2d - h/\mu = 0{,}66$ m față de B.

5

IMPULSUL MECANIC

Am definit impulsul punctului material în § 2.3.2 prin relația: $\vec{p} = m\vec{v}$; el are direcția și sensul vectorului viteză, iar variația sa pe unitatea de timp reprezintă forța: $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ (lex secunda).

5.1. TEOREMA IMPULSULUI PENTRU PUNCTUL MATERIAL. CONSERVAREA IMPULSULUI

Să transcriem ecuația (2.12) $\vec{F}_m = \Delta\vec{p}/\Delta t$ sub forma:

$$\vec{F}_m\,\Delta t = \Delta\vec{p} \text{ sau } \vec{F}_m(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \qquad (5.1)$$

Produsul $\vec{H} = \vec{F}_m\Delta t$ se numește *impulsul forței*. Ecuația (5.1) exprimă *teorema impulsului* pentru punctul material:

Variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței aplicate punctului material.

Dacă impulsul forței aplicate este zero, de exemplu dacă forța aplicată este nulă, adică punctul material este *izolat* ($\vec{F} \equiv 0$, $\vec{H} \equiv 0$), variația de impuls va fi nulă: $\Delta\vec{p} = 0$, deci impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$ rămîne neschimbat (constant).

Impulsul unui punct material izolat se conservă, $\vec{p} = \text{const}$, *adică punctul material izolat se mișcă rectiliniu uniform sau este în repaus* ($\vec{v} = \text{const}$) (în sisteme de referință inerțiale).

Impulsul se poate schimba numai sub acțiunea unei forțe exterioare.

În procesul interacțiunii realizat prin intermediul forței se face un transfer de mișcare de la un corp la altul, măsurat prin transferul de impuls și de energie cinetică, adică prin impulsul forței egal cu variația de impuls a corpului,

respectiv prin lucrul mecanic al forței, egal cu variația de energie cinetică a corpului.

Impulsul este o măsură a mișcării. Impulsul punctului material $\vec{p} = m\vec{v}$, este o măsură a mișcării mecanice pe care el o posedă (de aici provine și denumirea de cantitate de mișcare). *Teorema impulsului exprimă o lege de conservare a mișcării materiei.*

Verificarea experimentală a legii impulsului se reduce în fond la verificarea legii fundamentale a dinamicii.

5.2. TEOREMA IMPULSULUI ȘI LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI PENTRU UN SISTEM DE DOUĂ PARTICULE

Fie un sistem format din două particule m_1, m_2 care interacționează între ele. Conform principiului acțiunii și reacțiunii forța $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ exercitată asupra particulei m_1 de către particula m_2 este egală în modul și de sens opus cu forța $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ exercitată asupra particulei m_2 de către particula m_1, adică

$$\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21} \text{ sau } \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0. \tag{5.2}$$

Cele două forțe acționează de-a lungul dreptei care unește cele două particule (fig. 5.1) și *rezultanta lor este nulă.*

În afară de aceste forțe de interacțiune care constituie forțe interne pentru sistemul nostru, fiecare particulă interacționează în general cu mediul exterior, ceea ce se traduce prin forțele externe: $\vec{F}_1$ asupra particulei m_1, $\vec{F}_2$ asupra particulei m_2 (fig. 5.1). Am notat forțele interne cu $\vec{\mathcal{F}}$ rond.

Să scriem legea impulsului pentru fiecare particulă. Dacă forțele *nu* sînt constante, atunci pentru un interval Δt oarecare trebuie considerate forțele medii pe acel interval, de aceea mai jos toate forțele sînt constante sau medii pe intervalul Δt:

$$(\vec{F}_1 + \vec{\mathcal{F}}_{12})\Delta t = \Delta(m_1\vec{v}_1);\ (\vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{21})\Delta t = \Delta(m_2\vec{v}_2). \tag{5.3}$$

Adunînd membru cu membru cele două ecuații, găsim:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21})\Delta t = \Delta(m_1\vec{v}_1) + \Delta(m_2\vec{v}_2) = \Delta(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) \tag{5.4}$$

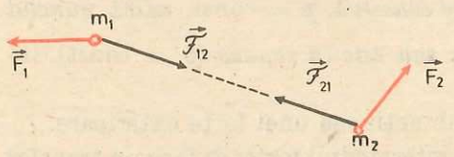


Fig. 5.1. Sistem de două particule care interacționează între ele și cu mediul exterior.

Dar, conform lui (5.2), rezultanta forțelor interne este nulă. Suma vectorială a forțelor externe dă *rezultanta forțelor externe:*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{5.5}$$

Pe de altă parte, impulsul total al sistemului este suma vectorială a impulsurilor particulelor componente:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \tag{5.6}$$

Ținînd seama de aceasta, ecuația (5.4) devine:

$$\vec{F}_m\,\Delta t = \Delta\vec{P}. \tag{5.7}$$

Impulsul forțelor externe asupra sistemului este egal cu variația impulsului total al sistemului.

Ecuația (5.7) se poate transcrie sub forma cunoscută a legii II:

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t},\ \left(\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{5.8}$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forțelor externe și $\vec{P}$ impulsul total al sistemului.

Forțele interne ale sistemului nu contribuie la variația impulsului *total* al sistemului, adică *nu pot schimba impulsul total al sistemului* (rezultanta lor fiind nulă). (Ele pot însă redistribui impulsul între particulele sistemului prin ciocniri.)

Dacă rezultanta forțelor externe este permanent zero sau dacă sistemul este izolat, adică nu interacționează cu mediul exterior, impulsul total se conservă (rămîne constant).

5.3. TEOREMA IMPULSULUI ȘI LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI PENTRU UN SISTEM OARECARE DE PARTICULE

Rezultatele obținute sînt valabile pentru un sistem format dintr-un număr *oarecare* de particule. În adevăr, particulele sistemului interacționează între ele prin forțe interne perechi, două cîte două egale în modul și de sensuri opuse, conform principiului acțiunii și reacțiunii. De aceea, dacă le însumăm pentru întregul sistem, ele se anulează două cîte două și dau rezultantă nulă.

Rezultanta forțelor interne ale unui sistem de particule este nulă.

Scriind legea impulsului pentru fiecare particulă și adunînd ecuațiile membru cu membru, așa cum am făcut pentru un sistem format din două particule, găsim legea impulsului pentru un sistem oarecare:

$$\vec{F}_m\Delta t = \Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1,$$

unde $\vec{F}_m$ este valoarea medie a rezultantei $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ și $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \ldots + \vec{p}_n$ sau sub forma legii II:

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t},\ \left(\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{5.9}$$

În aceste legi ale impulsului nu apar decît forțele *externe* care acționează asupra sistemului (cele interne dau rezultantă nulă).

Dacă sistemul este izolat sau dacă rezultanta forțelor externe este permanent nulă, impulsul total al sistemului se conservă.

Această lege este atît de generală și de importantă încît uneori este formulată și cunoscută sub numele de *principiul conservării impulsului* pentru sisteme izolate, alături de *principiul conservării energiei*.

Numai prin interacțiune cu mediul exterior se transmite mișcare și se schimbă impulsul total al sistemului.

Deși forțele interne nu pot schimba impulsul *total* al sistemului, ele schimbă în general impulsurile *părților componente* ale sistemului, adică *redistribuie* impulsul în interiorul sistemului, tocmai ca urmare a interacțiunii dintre *părțile* sistemului.

5.4. CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM DE DOUĂ PARTICULE

Vom introduce acum noțiunea de *centru de masă* (CM) al unui sistem — un punct asociat sistemului care caracterizează oarecum „global" distribuția de masă a sistemului și se bucură de proprietăți remarcabile.

Pentru două particule de aceeași masă $m_1 = m_2$, centrul lor de masă se află la mijlocul distanței dintre ele, pe dreapta care unește cele două particule. Dacă particulele au mase diferite, centrul lor de masă se va găsi tot pe dreapta care le unește, dar mai aproape de particula de masă mai mare și anume, distanțele CM pînă la cele două particule sînt în raport invers cu masele lor (fig. 5.2):

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ sau } m_1 d_1 = m_2 d_2, \text{ de unde } d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d, \text{ unde } d = d_1 + d_2. \quad (5.10)$$

Să găsim vectorul de poziție $\vec{r}_{CM}$ al centrului de masă. Observăm că $\vec{r}_{CM}$ se compune din $\vec{r}_1$ plus vectorul $\vec{d}_1$ dus din m_1 spre CM. Dar $d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$ (5.10), relație care se scrie și vectorial: $\vec{d}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

Rezultă atunci: $\vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

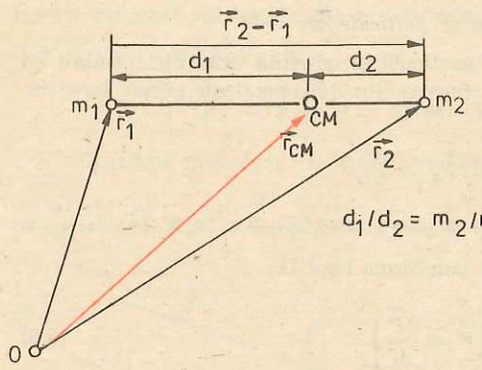


Fig. 5.2. Centrul de masă (CM) al unui sistem de două particule.

sau

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.11)$$

Relația vectorială (5.11) scrisă pe componente, de exemplu în cazul plan, ne dă coordonatele centrului de masă:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \qquad y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.12)$$

De exemplu, alegînd axa Ox pe direcția celor două particule (fig. 5.2), cu originea în m_1 și sensul spre m_2, avem:

$$x_1 = 0,\ x_2 = d \text{ și } x_{CM} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 d}{m_1 + m_2} = d_1.$$

Vom demonstra două proprietăți remarcabile ale centrului de masă.

a) Să calculăm viteza centrului de masă. Pentru două momente succesive t, t' avem (notăm $m = m_1 + m_2$ — masa sistemului):

$$m\vec{r}_{CM} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2;\ m\vec{r}'_{CM} = m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2.$$

De unde prin scădere membru cu membru:

$$m(\vec{r}'_{CM} - \vec{r}_{CM}) = m_1(\vec{r}'_1 - \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}'_2 - \vec{r}_2) \text{ sau } m\Delta\vec{r}_{CM} = m_1 \Delta\vec{r}_1 + m_2 \Delta\vec{r}_2$$

și împărțind la intervalul de timp $\Delta t = t' - t$:

$$m \frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = m_1 \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}$$

sau

$$m\vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}. \quad (5.13)$$

Impulsul total al sistemului este egal cu masa sistemului înmulțită cu viteza centrului de masă.

Observație. Centrul de masă se poate defini plecînd de la expresia impulsului total al sistemului. În adevăr, scriind impulsul total al sistemului astfel:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1)}{\Delta t} + \frac{\Delta(m_2\vec{r}_2)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{\Delta t} = m \frac{\Delta\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m}\right)}{\Delta t}, \quad (m = m_1 + m_2),$$

se vede că punctul definit prin vectorul de poziție:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

are proprietatea remarcabilă că viteza sa înmulțită cu masa sistemului ne dă impulsul total, *ca și cum* toată masa sistemului ar fi concentrată în centrul de masă și s-ar mișca cu viteza acestuia.

b) Să calculăm accelerația centrului de masă:

$$m\vec{v}_{CM} = \vec{P},\ m\vec{v}'_{CM} = \vec{P}',\ m(\vec{v}'_{CM} - \vec{v}_{CM}) = \vec{P}' - \vec{P},$$

$$m\Delta\vec{v}_{CM} = \Delta\vec{P},\ m\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

și ținînd seama de (5.8):

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}. \quad (5.14)$$

Rezultanta forţelor externe este egală cu masa sistemului înmulţită cu acceleraţia centrului de masă.

Prin urmare, centrul de masă se comportă *ca* un punct material avînd masa egală cu masa sistemului şi supus forţelor externe, *ca şi cum* întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM şi forţele externe ar acţiona în CM.

Dacă sistemul este *izolat* (sau rezultanta forţelor *externe* este nulă), centrul de masă va fi în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă.

5.5. CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM OARECARE DE PARTICULE

Formula (5.11) se generalizează uşor pentru un sistem format dintr-un număr oarecare de particule.

Fie 3 particule. Calculăm întîi centrul de masă a două particule, de exemplu $\vec{r}_{12} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ şi, înlocuindu-le cu o singură particulă de masă $(m_1 + m_2)$ situată în $\vec{r}_{12}$, calculăm centrul de masă dintre aceasta şi particula m_3:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r}_{12} + m_3\vec{r}_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Procedînd astfel din aproape în aproape obţinem în general:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k. \qquad (5.15)$$

Dacă un corp *omogen* posedă un plan de simetrie, atunci grupînd ca mai sus două cîte două particulele identice simetrice (situate de o parte şi de alta a planului de simetrie), găsim că CM se află în planul de simetrie. La fel se întîmplă în cazul unei axe de simetrie sau în cel al centrului de simetrie.

Dacă un corp omogen posedă un plan de simetrie, o axă de simetrie sau un centru de simetrie, centrul său de masă se va găsi în planul de simetrie, pe axa de simetrie sau în centrul de simetrie.

De exemplu, CM al unui cilindru omogen se află pe axa sa; CM al unei sfere omogene se află în centrul sferei; CM al unui paralelipiped dreptunghic se află în centrul paralelipipedului; CM al unui disc omogen subţire se află în centrul discului; CM al unei plăci omogene dreptunghiulare este în centrul ei.

Subliniem că CM este un punct geometric asociat sistemului, a cărui poziţie este determinată de *distribuţia* masei. În CM poate să nu fie deloc masă, ca în cazul unui inel omogen.

În formula (5.15) putem grupa termenii sumei corespunzători unui subsistem şi înlocui cu masa subsistemului (M) înmulţită cu vectorul de poziţie al CM corespunzător al subsistemului $(\vec{R})$:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_j M_j\vec{R}_j, \qquad (5.16)$$

unde M_j sînt masele subsistemelor şi $\vec{R}_j$ vectorii de poziţie ai centrelor lor de masă.

Formula (5.16) se scrie pe componente într-un sistem de coordonate convenabil.

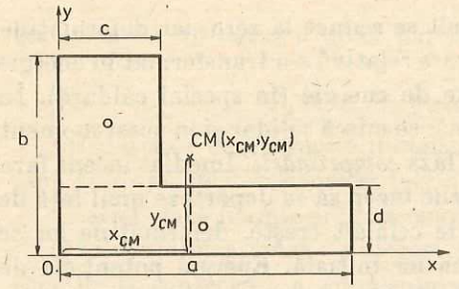


Fig. 5.3. Calculul poziţiei centrului de masă (CM) al unei plăci omogene.

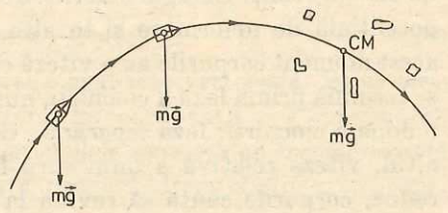


Fig. 5.4. Centrul de masă al unui obuz continuă să se mişte după explozie, ca centru de masă al schijelor, neperturbat pe parabolă (în vid).

EXEMPLU

Să se calculeze CM al plăcii omogene din figura 5.3.

Rezolvare. Placa fiind *omogenă*, masele sînt proporţionale cu ariile şi în (5.16) putem folosi ariile respective. Alegînd axele ca în figură, avem

$$x_{CM} = \frac{ad \cdot \dfrac{a}{2} + (b-d)c \cdot \dfrac{c}{2}}{ad + (b-d)c}, \qquad y_{CM} = \frac{ad \cdot \dfrac{d}{2} + (b-d)c \cdot \left(d + \dfrac{b-d}{2}\right)}{ad + (b-d)c}.$$

Cele două teoreme privind CM, de la § 5.3, rămîn valabile şi în cazul unui sistem oarecare. Astfel, de exemplu, *dacă rezultanta forţelor externe este zero (sau dacă sistemul este izolat), centrul său de masă va fi în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă*, deşi părţile sistemului se pot mişca accelerat.

Mişcarea centrului de masă este dictată de forţele *externe*, *forţele interne nu influenţează mişcarea centrului de masă*. De exemplu, dacă un obuz care se mişcă liber în vid (sub acţiunea greutăţii) explodează la un moment dat, centrul său de masă continuă să se mişte, ca centru de masă al schijelor, neperturbat pe parabolă, ca şi cum nimic nu s-a întîmplat, pînă cînd măcar una din schije atinge pămîntul şi apare o forţă externă care va devia CM de pe parabolă (fig. 5.4).

Într-un cîmp gravitaţional *omogen* centrul de masă coincide cu centrul de greutate (punctul de aplicaţie al rezultantei forţelor de greutate).

5.6. CIOCNIRI

Prin *ciocnirea* a două sau mai multe corpuri se înţelege un *proces de interacţiune care durează un timp finit*, astfel încît atît înainte, cît şi după ciocnire corpurile nu interacţionează. La ciocnirea corpurilor macroscopice interacţiunea durează atît timp cît corpurile sînt în contact şi acest timp de contact este foarte scurt faţă de duratele obişnuite (timpul de contact este de ordinul milisecundelor).

La ciocnirea a două corpuri (macroscopice) putem distinge două faze sau etape. Imediat ce corpurile vin în contact începe frînarea lor reciprocă, bruscă, şi deformarea lor. Energia cinetică de mişcare relativă a unui corp faţă de celălalt se transformă, prin lucrul mecanic al forţelor interne de ciocnire, în energie potenţială de deformare a corpurilor. La un moment dat

viteza relativă a unui corp față de celălalt se reduce la zero, iar deformațiile lor sînt maxime. Energia cinetică de mișcare relativă s-a transformat în energie potențială de deformare și în alte forme de energie (în special căldură). În acest moment corpurile au o viteză comună, se mișcă solidar și în acest moment se termină prima fază a ciocnirii, numită faza *comprimării*. Imediat începe faza a doua a ciocnirii: faza *separării*. Corpurile încep să se depărteze unul față de altul, viteza relativă a unui corp față de celălalt crește, deformațiile lor se reduc, corpurile caută să revină la forma lor inițială. Energia potențială de deformare se transformă parțial în energie cinetică de mișcare relativă a corpurilor. În momentul cînd se separă complet, se termină faza decomprimării sau separării.

La ciocnirea unor corpuri elastice (bile de oțel, bile de fildeș), deformațiile dispar după ciocnire, corpurile își recapătă forma lor inițială, energia cinetică „relativă" se restituie aproape integral și ciocnirea se cheamă *elastică*. Dar, în general, după ciocnire rămîn deformații *remanente*, de exemplu la bilele de plumb sau de plastilină.

În timpul ciocnirii apar forțe de interacțiune mari între corpurile care se ciocnesc, dar aceste forțe durează foarte puțin, atîta timp cît durează ciocnirea (contactul dintre corpuri). Conform principiului acțiunii și reacțiunii, forțele cu care acționează cele două corpuri, unul asupra celuilalt, sînt egale în modul și de sensuri opuse (fig. 5.5). Forțele normale se datoresc deformării elastice reciproce a celor două corpuri, iar forțele tangențiale se datoresc frecării dintre corpuri în planul de contact (întrepătrunderii asperităților sau rugozităților suprafețelor în contact).

Pentru sistemul format din cele două corpuri forțele care apar în procesul ciocnirii sînt forțe *interne* și dau rezultantă *nulă*. Prin urmare aceste forțe *nu* pot schimba impulsul *total* al celor două corpuri, dar îl *redistribuie* între cele două corpuri. De exemplu, dacă un vagonet lovește un altul aflat în repaus, acesta din urmă va căpăta un impuls pe seama impulsului primului corp: *avem un transfer de mișcare mecanică și de impuls de la un corp la altul prin ciocnire*.

În timpul foarte scurt cît durează ciocnirea, forțele externe obișnuite (de exemplu forțele de frecare sau forțele de greutate) nu pot modifica sensibil impulsul total al sistemului. De aceea chiar dacă corpurile care se ciocnesc sînt supuse la forțe externe, putem totuși scrie conservarea impulsului total al sistemului în sensul următor:

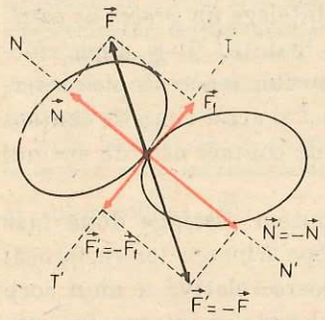


Fig. 5.5. Forțele care apar la ciocnirea a două corpuri.

Suma vectorială a impulsurilor corpurilor imediat înainte de ciocnire trebuie să fie egală cu suma vectorială a impulsurilor corpurilor imediat după ciocnire:

$$\vec{P}_{inițial} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \vec{P}_{final} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots \qquad (5.17)$$

De exemplu, în cazul a două particule:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2. \qquad (5.18)$$

Ecuația de conservare a impulsului este o egalitate vectorială. Ea se scrie pînă la urmă pe componente într-un sistem de coordonate ales convenabil.

Astfel, dacă înainte și după ciocnire particulele se mișcă pe *aceeași dreaptă* — cazul *unidimensional* — alegem această dreaptă drept axă Ox și atunci ecuația de conservare a impulsului devine:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2, \qquad (5.19)$$

unde vitezele inițiale v_1, v_2 și cele finale v'_1, v'_2, pot fi pozitive sau negative după cum particulele se mișcă în sensul pozitiv ales sau cel negativ al axei.

5.6.1. **Ciocnirea plastică (total neelastică).** Un caz particular important al ciocnirilor este ciocnirea *total neelastică* sau *plastică*. În acest caz, prin ciocnire corpurile *se cuplează*, se lipesc și își continuă mișcarea împreună, cu aceeași viteză comună. Exemple: cînd aruncăm o piatră într-un vagonet sau alergăm după un vagonet (tramvai, barcă) și sărim în el sau cînd un glonț rămîne înfipt într-o țintă sau un obiect fragil cade jos pe podea etc. Reversul acestor ciocniri este cazul descompunerii sau desfacerii unui corp în mai multe fragmente (de exemplu cazul exploziei unui obuz). Dacă filmăm acest proces și proiectăm filmul în sens invers, obținem exact cazul ciocnirii plastice; și invers, o ciocnire plastică filmată și proiectată în sens invers apare ca o dezagregare, descompunere sau explozie. De aceea și aceste procese de descompunere pot fi înglobate în categoria de ciocniri plastice. De exemplu, sărim din mers dintr-un vagonet (cărucior, barcă) sau aruncăm dintr-un vagonet sau barcă diferite obiecte etc. În toate aceste cazuri se aplică evident legea conservării impulsului.

Fie două particule cu masele m_1, m_2 și vitezele $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ care se ciocnesc plastic. Înainte de ciocnire avem două corpuri cu impulsurile $m_1\vec{v}_1$, $m_2\vec{v}_2$, iar după ciocnire avem un singur corp de masă $m_1 + m_2$ și viteză $\vec{v}'$. Scriem legea conservării impulsului total:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}', \text{ de unde } \vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5.20)$$

Viteza finală se poate afla și grafic. Reprezentăm la o anumită scară vitezele și impulsurile (fig. 5.6). Compunem vectorial impulsurile $m_1\vec{v}_1$ și $m_2\vec{v}_2$ (după regula paralelogramului) și rezultatul îl împărțim la masa totală $m_1 + m_2$.

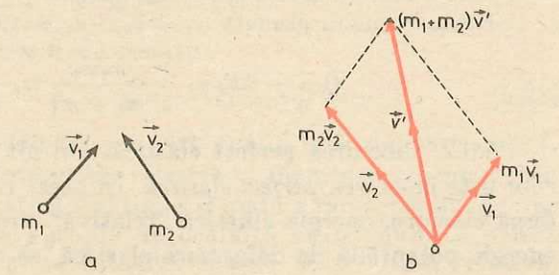


Fig. 5.6. Ciocnirea plastică a două particule.

În cazul *unidimensional* formula (5.20) devine

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{5.21}$$

În ciocnirea plastică o parte din energia cinetică a corpurilor se transformă în alte forme de energie (în special în căldură):

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_2 + m_1) v'^2 + Q,$$
$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2. \tag{5.22}$$

Introducînd aici pe v' din (5.21), obținem:

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} m_r v_r^2, \tag{5.23}$$

unde $v_r = v_1 - v_2$ este viteza relativă (a particulei 1 față de particula 2), iar m_r se numește masa redusă a celor două particule. Prin urmare, numai energia cinetică de mișcare relativă (a unei particule față de alta) dispare prin cuplarea particulelor, transformîndu-se în alte forme de energie.

EXEMPLU

Două cărucioare de mase $m_1 = 1{,}00$ kg, $m_2 = 2{,}00$ kg se mișcă unul spre celălalt cu vitezele $v_1 = 1{,}00$ m/s, $v_2 = -2{,}00$ m/s. Prin ciocnire cărucioarele se cuplează (ciocnire plastică). Care va fi viteza lor comună după ciocnire și energia cinetică pierdută?

Rezolvare. Am ales axa Ox în sensul mișcării primului cărucior, de aceea viteza v_2 este negativă. Scriem conservarea impulsului:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v', \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v' = \frac{1{,}00 \text{ kg} \cdot 1{,}00 \text{ m/s} - 2{,}00 \text{ kg} \cdot 2{,}00 \text{ m/s}}{1{,}00 \text{ kg} + 2{,}00 \text{ kg}} = -1{,}00 \text{ m/s}.$$

Semnul minus arată că după ciocnire și cuplare cărucioarele se vor mișca în sensul negativ al axei alese Ox, adică în sensul vitezei inițiale a celui de-al doilea cărucior (care a avut un impuls inițial mai mare).
Energia cinetică pierdută ($v_r = v_1 - v_2 = 1{,}00 - (-2{,}00) = 3{,}00$ m/s):

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = 3{,}00 \text{ J}.$$

5.6.2. **Ciocnirea perfect elastică.** Un alt caz particular simplu al ciocnirilor este ciocnirea *perfect elastică*. În acest caz deformațiile corpurilor dispar după ciocnire, energia cinetică „relativă", transformată în timpul ciocnirii în energie potențială de deformare elastică, se restituie integral în energie cinetică după ciocnire.

Ciocnirea este perfect elastică dacă energia cinetică a corpurilor se conservă prin ciocnire, adică energia cinetică totală a corpurilor înainte de ciocnire este egală cu energia cinetică totală a corpurilor după ciocnire:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \tag{5.24}$$

Bineînțeles, mai avem și ecuația de conservare a impulsului total:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'. \tag{5.25}$$

În natură nu există *riguros* ciocnire *perfect* elastică între corpuri macroscopice, dar de multe ori corpurile elastice (de exemplu bilele de fildeș, de oțel, cărucioarele prevăzute cu tampoane-resorturi elastice) la ciocniri ușoare verifică bine condiția (5.24).

De obicei cunoaștem masele și vitezele inițiale ale corpurilor și vrem să aflăm vitezele lor finale. Avem o ecuație de conservare a energiei cinetice (5.24) și trei ecuații algebrice (pe componente) de conservare a impulsului (5.25), deci 4 ecuații, și $3 + 3 = 6$ necunoscute pentru componentele vitezelor finale. Prin urmare, în cazul general al ciocnirii *în spațiu* a două particule, datele și ecuațiile de mai sus nu sînt suficiente. În cazul ciocnirii în *plan* vom avea $1 + 2 = 3$ ecuații și $2 + 2 = 4$ necunoscute, deci trebuie să mai cunoaștem o dată asupra ciocnirii.

În cazul *unidimensional*, cînd atît înainte, cît și după ciocnire particulele se mișcă pe *aceeași dreaptă* pe care o alegem drept axă Ox, avem două ecuații de conservare și două necunoscute:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2, \tag{5.26}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{5.27}$$

Sistemul se rezolvă astfel. Trecem termenii care conțin pe m_1 în stînga și pe cei care conțin pe m_2 în dreapta:

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

sau

$$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2),$$

și

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2).$$

Împărțim membru la membru cele două ecuații:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \text{ sau } v_r' = v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2) = -v_r. \tag{5.28}$$

Aici $v_1' - v_2'$ reprezintă viteza *relativă* v_r', a particulei *1* față de particula *2*, după ciocnire, iar $v_1 - v_2$ reprezintă viteza relativă v_r înainte de ciocnire. Prin urmare, în ciocnirea perfect elastică unidimensională a două particule una din ele (de exemplu prima) se apropie de cealaltă cu o anumită viteză relativă $v_r = v_1 - v_2$, o lovește și se întoarce înapoi cu o viteză relativă egală în modul dar de semn schimbat.

Ecuația (5.28) împreună cu ecuația de conservare a impulsului (5.27) ne permite să aflăm imediat vitezele finale v_1', v_2' după ciocnirea perfect elastică unidimensională a două particule:

$$v_1' = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1, \quad v_2' = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_2. \tag{5.29}$$

Discuție: a) Dacă particula *2* era în repaus înainte de ciocnire ($v_2 = 0$), obținem:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{5.30}$$

Se vede că în acest caz corpul *2* va căpăta o viteză v_2' în sensul în care este lovit (v_2' este de același semn cu v_1), în timp ce primul corp se poate întoarce înapoi dacă masa sa m_1 este mai mică decît a celui de-al doilea corp.

b) Dacă masele sînt egale, din (5.29) rezultă că $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$, corpurile schimbă vitezele între ele, ca și cum ar trece unul pe lîngă celălalt fără să se atingă, unul luînd locul celuilalt. În aceleași condiții (adică $m_1 = m_2$), dacă al doilea corp era în repaus ($v_2 = 0$), atunci primul corp se oprește ($v_1' = 0$), iar al doilea pornește cu viteza primului ($v_2' = v_1$). Aceste rezultate sînt frumos ilustrate de următorul experiment.

EXPERIMENT

Suspendăm două bile identice pe fire paralele egale (fig. 5.7). Dacă deviem o bilă cu un anumit unghi și îi dăm drumul să se ciocnească cu cealaltă, atunci prin ciocnire prima se va opri, iar a doua va fi deviată aproape cu același unghi ca prima. După aceasta, bila a doua se întoarce înapoi și o lovește pe prima, oprindu-se la rîndul ei, și așa mai departe pînă ce mișcarea se stinge sau se strică (bilele nu mai rămîn în același plan vertical, dacă nu sînt perfect centrate sau dacă nu sînt suspendate fiecare prin 2 fire în forma literei V).

Dacă acum bila deviată are masă mai mare decît cea aflată în repaus, atunci după ciocnire ea va devia în continuare; dacă are masă mai mică, ea va fi deviată înapoi.

Observăm că în orice fel de ciocnire impulsul total al sistemului (izolat) se conservă, fiindcă rezultanta forțelor interne de ciocnire este totdeauna zero (principiul III), în timp ce energia cinetică totală în general nu se conservă, fiindcă lucrul mecanic al forțelor interne nu este în general zero și

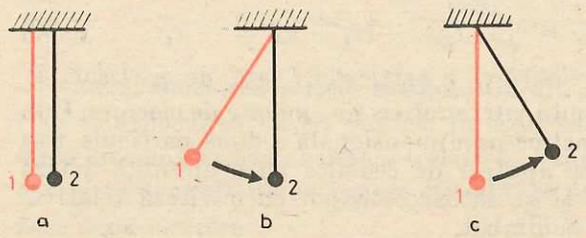


Fig. 5.7. Ciocnirea a două bile identice, dintre care una este în repaus

atunci o parte din energia cinetică se transformă în *alte* forme de energie (căldură sau alte forme disipate în mediu). În cazul exploziilor (descompunerilor) se creează energie cinetică pe seama altor forme ale energiei interne (chimică etc.). Bineînțeles, energia *totală* a sistemului izolat se conservă (principiul conservării energiei).

5.6.3. **Ciocnirea cu un perete.** În copilărie ne-am jucat cu mingea, aruncînd-o pe podea sau pe perete și apoi prinzînd-o. Observații simple ne arată că dacă aruncăm mingea perpendicular pe perete (sau pe podea), ea se întoarce înapoi tot perpendicular pe perete cu o viteză egală în modul, dar de semn schimbat, față de viteza inițială.

În teoria ciocnirilor se înțelege prin *ciocnirea cu un perete — ciocnirea cu un corp de masă foarte mare, astfel încît viteza acestuia nu se schimbă prin ciocnire.*

Acesta este cazul ciocnirii unei mingi cu podeaua sau cu un perete (eventual mobil) sau cazul ciocnirii unei molecule de gaz cu pereții vasului în care se găsește gazul sau cu pistonul (mobil) dacă gazul se află într-un cilindru cu piston.

Să considerăm ciocnirea perfect elastică (unidimensională) cu un corp de masă m_2 foarte mare (față de m_1). Să transcriem atunci formulele (5.29) sub următoarea formă:

$$v_1' = 2\frac{\frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} - v_1; \quad v_2' = 2\frac{\frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} - v_2. \tag{5.31}$$

Dacă masa m_2 este foarte mare, atunci fracția $\frac{m_1}{m_2}$ va fi foarte mică și pentru m_2 extrem de mare, fracția m_1/m_2 se va micșora pînă la zero. Atunci formulele de mai sus devin (punînd $m_1/m_2 = 0$):

$$v_1' = 2v_2 - v_1, \qquad v_2' = v_2, \tag{5.32}$$

adică în adevăr viteza peretelui (de masă m_2) nu se schimbă prin ciocnire ($v_2' = v_2$). Prima formulă se obține și direct din condiția (5.28) pentru viteza relativă în ciocnirea perfect elastică unidimensională, dacă punem, $v_2' = v_2$.

În cazul cînd peretele este în repaus ($v_2 = 0 = v_2'$), obținem rezultatul așteptat: $v_1' = -v_1$, adică particula se întoarce înapoi (ricoșează) cu aceeași viteză în modul (fig. 5.8, *a*).

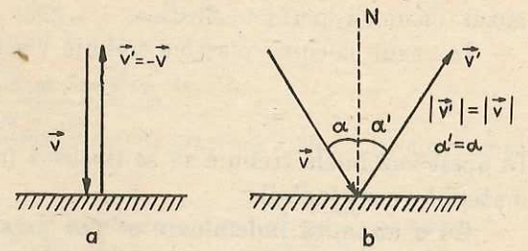


Fig. 5.8. Ciocnirea perfect elastică cu un perete în repaus: *a)* frontală, *b)* oblică.

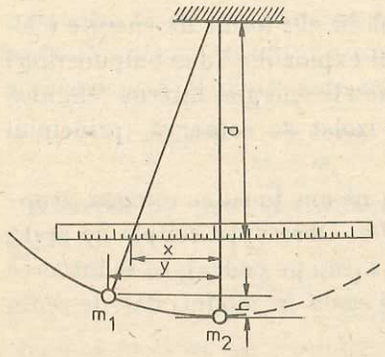


Fig. 5.9. Dispozitiv pentru verificarea legilor de conservare la ciocniri.

În sfîrșit, dacă particula lovește oblic și perfect elastic un perete aflat în repaus, ea ricoșează sub un unghi de „reflexie" α', egal cu unghiul de „incidență" (de cădere) α și cu viteza $\vec{v}'$ este egală în modul cu viteza $\vec{v}$ (fig. 5.8, *b*):

$$|\vec{v}'| = |\vec{v}|, \ \alpha' = \alpha. \tag{5.33}$$

Verificarea experimentală a legilor de conservare la ciocniri se poate face de exemplu cu dispozitivul simplu din figura 5.9.

Două bile de mase m_1, m_2 cunoscute sînt suspendate pe fire paralele apropiate, de lungime $l(\sim 50$ cm). Bila m_1 este deviată, astfel încît firul său de suspensie să se deplaseze cu o distanță $x(\sim 5$ cm), măsurată pe o riglă gradată; bila m_2 rămîne în repaus. După ciocnire notăm iarăși distanțele x_1', x_2' cu care deviază firele de suspensie ale bilelor.

Viteza imediat înainte sau imediat după ciocnire se exprimă prin înălțimea respectivă h : $v = \sqrt{2gh}$ (fig. 5.9). Conform figurii 5.9, din asemănarea triunghiurilor dreptunghice rezultă:

$$\frac{y}{x} = \frac{l-h}{d}, \text{ dar } y = \sqrt{l^2-(l-h)^2} = \sqrt{h(2l-h)}.$$

Considerînd devieri cu unghiuri mici, deci $h \ll l$, putem scrie aproximativ (neglijînd pe h față de l și $2l$):

$$\frac{y}{x} \cong \frac{l}{d}, \quad y \cong \sqrt{2hl}, \text{ de unde } \sqrt{2h} \cong \frac{x}{d}\sqrt{l}$$

și deci viteza

$$v = \sqrt{2gh} \cong x\frac{\sqrt{gl}}{d} = Cx,$$

unde (5.34)

$$C = \frac{\sqrt{gl}}{d},$$

este constanta aparatului pe care o calculăm de la bun început.

Alegînd o deviație x_1 și măsurînd deviațiile x_1' și x_2', calculăm vitezele v_1' și v_2' cu (5.34) și le comparăm cu vitezele teoretice calculate cu (5.30) în cazul ciocnirii perfect elastice.

În cazul ciocnirii plastice trebuie verificată relația ($v_2 = 0$):

$$v' = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1. \tag{5.35}$$

În acest caz, bilele trebuie să se lipească (cupleze) (bile din plastilină sau alt material convenabil).

Cu o anumită îndemînare se pot măsura direct înălțimile h cu ajutorul unei rigle așezate vertical pe masă în dreptul bilei respective.

1. Un corp de masă $m = 10{,}0$ kg, avînd viteza inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s, este frînat cu o forță constantă $F = 50$ N (pe aceeași direcție cu viteza). Să se afle timpul pînă la oprirea corpului.

Rezolvare. Scriem legea impulsului: $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$. Dacă Δt este timpul pînă la oprire, atunci viteza finală $v = 0$ (condiția de oprire) și proiectînd ecuația pe axa mișcării:

$$F\Delta t = 0 - mv_0, \quad \Delta t = \frac{mv_0}{F} = \frac{10{,}0 \text{ kg} \cdot 10{,}0 \text{ m/s}}{50 \text{ N}} = 2{,}0 \text{ s}.$$

Analog, dacă un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0, atunci forța de greutate îl frînează și timpul de urcare va fi: $t_u = mv_0/mg = v_0/g$ (rezultat cunoscut).

2. O minge cu masa $m = 0{,}100$ kg lovește frontal un perete cu viteza $v = 5{,}0$ m/s. Dacă timpul de contact cu peretele este $\Delta t = 1{,}0$ ms, să se afle forța medie care apare la contactul dintre minge și perete.

Rezolvare. Să scriem legea impulsului pentru minge (fig. 5.8, *a*): $\vec{F}_m\Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v}$. Dar $\vec{v}' = -\vec{v}$ din condiția de ciocnire perfect elastică, atunci $\vec{F}_m\Delta t = -2m\vec{v}$, $\vec{F}_m = -\dfrac{2m\vec{v}}{\Delta t}$. Prin urmare, forța exercitată asupra mingii din partea peretelui este perpendiculară pe perete și de sens opus vitezei inițiale și are valoarea:

$$F_m = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 0{,}100 \text{ kg} \cdot 5{,}0 \text{ m/s}}{1{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 1{,}0 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

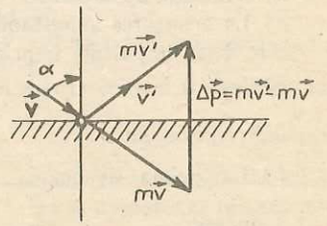


Fig. 5.10. Variația impulsului la ciocnirea oblică perfect elastică cu un perete în repaus (problema rezolvată 2).

Dacă mingea lovește oblic peretele (fig. 5.10), atunci variația impulsului se obține prin scăderea *vectorială*: $\Delta\vec{p} = m\vec{v}' - m\vec{v}$ (fig. 5.10).
În valoarea absolută

$$|\Delta\vec{p}| = 2mv\cos\alpha, \ F_m = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} \tag{5.36}$$

și forța este de asemenea perpendiculară pe perete.

3*. Un elev stă pe un cărucior aflat în repaus și ține în mîini două bile, fiecare de masă $m = 2{,}00$ kg. Masa elevului și a căruciorului este $M = 60{,}0$ kg. Elevul imprimă bilelor o viteză $u = 3{,}1$ m/s relativă la el *înainte* de aruncare (ceea ce înseamnă că imprimă bilelor același impuls $F\Delta t = m\,v_{final} - m\,v_{inițial} = m\,u$). Care va fi viteza finală a căruciorului, dacă elevul aruncă bilele în același sens: *a)* simultan, *b)* succesiv? Cîtă energie cinetică creează elevul?

Rezolvare. a) La aruncarea simultană:

$$0 = Mv' + 2mu, \ v' = -\frac{2m}{M}u = -\frac{0{,}62}{3} = -0{,}21 \text{ m/s};$$

$$\Delta E_c = \frac{m}{M}(M+2m)u^2 = 20{,}5 \text{ J}.$$

Viteza imprimată căruciorului este opusă vitezei de aruncare a bilelor (semnul minus)
b) La prima aruncare:

$$0 = (M+m)v_1 + mu, \ v_1 = -\frac{m}{M+m}u; \ \Delta E_{c1} = \frac{1}{2}mu^2\frac{M+2m}{M+m} = 9{,}92 \text{ J}.$$

La a doua aruncare: $(M + m)v_1 = Mv_2 + m(v_1 + u)$,

$$v_2 = v_1 - u\frac{m}{M} = -\frac{m(2M+m)}{M(M+m)}u = -\frac{0{,}61}{3} = -0{,}20 \text{ m/s}, \quad |v'| > |v_2|;$$

$$\Delta E_{c2} = \frac{1}{2}mu^2\frac{M+m}{M} = 9{,}93 \text{ J}.$$

În toate ecuațiile de conservare a impulsului vitezele corpurilor trebuie luate față de *același* sistem de referință (Pămîntul), de aceea în ultima ecuație apare viteza bilei $v_1 + u$ față de Pămînt, fiindcă bila are deja viteza căruciorului v_1 la care se adaugă viteza u imprimată față de cărucior. Se poate scrie ecuația a doua și față de sistemul de referință care se mișcă cu viteza v_1 a căruciorului: $0 = Mv_2' + mu$, unde v_2' este a doua viteză a căruciorului față de prima viteză v_1. Atunci față de Pămînt: $v_2 = v_1 + v_2'$ și regăsim rezultatul de mai sus.

Să reluăm problema, dar considerînd că elevul aruncă bilele în sensuri opuse: *a)* simultan, *b)* succesiv.

a) La aruncarea simultană: $0 = Mv' + mu - mu$, $v' = 0$, ceea ce era de așteptat; cele două impulsuri imprimate se compensează fiind egale în modul și de sensuri opuse:

$$\Delta E_c = mu^2 = 19{,}22 \text{ J}.$$

b) La prima aruncare: $0 = (M + m)v_1 + mu$, $v_1 = -\frac{m}{m+M}u$ și la a doua aruncare:

$$(M + m)v_1 = Mv_2 + m(v_1 - u),\ v_2 = v_1 + \frac{m}{M}u = \frac{m^2u}{M(M+m)} = \frac{1}{300}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}0033 \text{ m/s},$$

deci căruciorul va căpăta pînă la urmă o viteză în sensul primei aruncări, ceea ce era de așteptat deoarece a doua aruncare are efect mai puternic asupra căruciorului, acesta avînd acum o masă mai mică. Energiile cinetice create sînt aceleași ca la aruncarea succesivă în același sens.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un meteorit arde în atmosferă, fără a ajunge la suprafața Pămîntului. Unde dispare impulsul său?

R: parțial în particulele de ardere, parțial în moleculele de aer lovite.

2. Un disc omogen se rotește în jurul axei sale fixe. Care este impulsul său total?

R: zero.

3. Cum s-ar putea întoarce un cosmonaut, ieșit în spațiul cosmic, înapoi la nava cosmică, dacă cablul care-l leagă de navă se rupe, știind că cosmonautul are cu el o trusă de instrumente?

R: aruncă instrumentele în sensul opus.

4. Pe o scîndură stă un om. Cum se va încovoia scîndura în primul moment cînd omul brusc se ghemuiește? Dar dacă, odată ghemuit, se ridică brusc?

R: se ridică; coboară.

5. Întîmplarea povestită de Münchhausen că ar fi ieșit dintr-o mlaștină (cu cal cu tot) trăgîndu-se cu putere de păr în sus poate fi adevărată?

R: nu.

6. Poate un om să se ridice pe el însuși, trăgînd de un capăt al unei sfori, care este trecută peste un scripete (cu axă orizontală fixă) și legată cu celălalt capăt la brîul său? Cu ce forță trebuie să tragă de sfoară?

R: $F = G/2$.

7. S-ar putea propulsa o barcă cu pînze, suflînd aer spre pînze cu ajutorul unui ventilator instalat în barcă? Dar dacă suflăm alături de pînze (adică fără a nimeri în pînze)?

R: nu; da.

8*. Deși forțele interne ale unui sistem nu pot modifica impulsul *total* (rezultant) al sistemului, ele pot crea sau anihila două impulsuri egale în modul și de sensuri opuse purtate de două părți componente ale sistemului (de exemplu în cazul exploziilor sau al ciocnirilor plastice). Cum ați putea explica înaintarea vapoarelor și a avioanelor cu elice?

R: impulsul navei este opus impulsului imprimat fluidului.

9. Caracatițele se pot deplasa cu o viteză pînă la 60 m/s, ejectînd periodic apa pe care o absorb. Pe ce principii se bazează deplasarea lor?

R: conservarea impulsului.

10. Dacă umflăm un balon de cauciuc cu aer și fără a-l lega la orificiu îi dăm drumul cu orificiul în jos, ce se va întîmpla?

R: se va ridica în sus.

11. Ce se întîmplă cu o barcă ușoară cînd ne deplasăm pe ea de la un capăt la celălalt?

R: se deplasează în sens invers.

12. Dacă pe un cărucior este suspendat un pendul și îi dăm drumul să oscileze, ce se va întîmpla cu căruciorul?

R: va oscila în sens invers.

13. *a)* De ce cînd atingem Pămîntul după o săritură trebuie să ne mai ghemuim (îndoind puțin picioarele)? Dar dacă am sta țeapăn?

b) De ce putem sări fără pericol de la etajul doi sau trei pe o plasă elastică întinsă deasupra solului?

c) Cînd un fotbalist prinde mingea, el relaxează puțin mușchii mîinilor și se retrage puțin înapoi împreună cu mingea. De ce? Dacă ar sta țeapăn și ar ține mîinile țeapăn, ce s-ar întîmpla?

R: forța medie de impact (ciocnire) este invers proporțională cu durata ciocnirii (v. relația 5.36).

14. Pe o masă de biliard stau două bile de diametre egale, dar probabil de mase diferite. Cum putem determina fără cîntar sau alte aparate, dacă bilele au mase egale sau care anume are masă mai mare?

R: prin ciocnire, (v. relația 5.30)

15. Impulsul unui corp este $p = 4{,}0$ N · s, iar energia cinetică $E_c = 8{,}0$ J. Să se afle masa și viteza corpului.

R: $m = \frac{p^2}{2E_c} = 1{,}0$ kg; $v = \frac{2E_c}{p} = 4{,}0$ m/s.

16. Ecuația de mișcare a unui punct material de masă $m = 0{,}20$ kg este $x = 2 - t + t^2$. Să se scrie expresia impulsului în funcție de timp.

R: $p = mv = -0{,}2 + 0{,}4\,t$.

17. Un punct material cu masa $m = 1{,}0$ kg se mișcă circular uniform cu viteza $v = 10$ m/s. Să se calculeze variația de impuls în timpul: *a)* unei perioade, *b)* unei jumătăți de perioadă, *c)* unui sfert de perioadă.

R: $|\vec{\Delta p}| = 0$; $2mv = 20$ N · s; $\sqrt{2} \cdot mv = 14{,}1$ N · s.

18. O bilă cu masa $m = 100$ g a căzut liber pe un plan orizontal avînd în momentul loviriі o viteză $v = 10$ m/s. Să se afle variația impulsului prin lovire, considerînd ciocnirea: *a)* perfect elastică, *b)* absolut inelastică (plastică). Dacă durata ciocnirii a fost $\Delta t = 20$ ms, care a fost forța medie de lovire?

R: *a)* $\Delta p = 2mv = 2{,}0$ N · s; $F_m = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = 100$ N.

b) $\Delta p = mv = 1{,}0$ N · s; $F_m = 50$ N.

19. Un corp lovește frontal un perete. În ce raport este forța medie de contact, în cazul ciocnirii elastice, față de forța din cazul ciocnirii plastice, dacă timpul de ciocnire este același?

R: 2.

20. Ce forță constantă de frînare trebuie aplicată unui tren de masă $m = 600$ t, care se mișcă cu viteza $v_0 = 72$ km/h, pentru a-l opri în $\Delta t = 10$ s?

R: $F = mv_0/\Delta t = 1{,}2$ MN.

21. Un corp cu masa $m_1 = 0{,}40$ kg și viteza $v_1 = 5{,}0$ m/s lovește un alt corp care se mișcă spre el pe aceeași direcție. După ciocnire corpurile se opresc. Care a fost impulsul celui de-al doilea corp?

R: $p_2 = -m_1v_1 = -2{,}0$ N · s.

22. Un vagonet de masă $M = 20$ kg se mișcă cu viteza $v = 3{,}0$ m/s. Ce viteză va căpăta vagonetul dacă în el cade vertical un sac cu masa $m = 10$ kg?

R: $v' = v\dfrac{M}{M + m} = 2{,}0$ m/s.

23. Două bile de mase $m_1 = 1{,}0$ kg și $m_2 = 2{,}0$ kg se mișcă una spre cealaltă cu vitezele $v_1 = 1{,}0$ m/s și $v_2 = -2{,}0$ m/s. Să se afle pierderea de energie cinetică (căldura) prin ciocnirea lor plastică.

R: $Q = -\Delta E_c = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 = 3{,}0$ J.

24. O bilă de lemn cu masa $M = 1{,}00$ kg stă pe un suport inelar. Un glonț de masă $m = 10{,}0$ g vine de jos în sus, lovește cu viteza $v_0 = 300$ m/s bila și rămîne înfipt în ea. Care va fi timpul de urcare al bilei pînă la înălțimea maximă? Cîtă căldură se degajă?

R: $t_u = \dfrac{m}{m + M}\dfrac{v_0}{g} = 0{,}30$ s; $Q = \dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m + M}v_0^2 = 446$ J.

25. Un om aflat într-o barcă trage cu ajutorul unei sfori o a doua barcă cu o forță constantă $F = 100$ N. Masa primei bărci împreună cu omul este $m_1 = 100$ kg masa celei de-a doua bărci este $m_2 = 50$ kg. Neglijînd rezistența apei, să se afle vitezele bărcilor după $\Delta t = 2{,}0$ s.

R: $v = F\,\Delta t/m_1 = 2{,}0$ m/s; $v_2 = F\,\Delta t/m_2 = 4{,}0$ m/s.

26. Un om de masă $m = 70$ kg parcurge lungimea unei bărci (de la proră la pupă) $l = 4{,}0$ m. Cu cît se deplasează barca față de apă în acest timp, dacă masa ei este $M = 30{,}0$ kg?

R: $s = \dfrac{m}{m + M}l = 2{,}8$ m.

27. Un vagon cu masa $m_1 = 10{,}0$ t se deplasează pe o cale ferată orizontală cu viteza inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s. După un timp $\Delta t = 10{,}0$ s el se ciocnește și se cuplează cu un al doilea vagon de masă $m_2 = 20{,}0$ t aflat în repaus. În timpul mișcării, atît înainte cît și după ciocnire, asupra fiecărui vagon acționează o forță de frecare egală cu $n =$ = 98-a parte din greutatea respectivului vagon. Să se afle viteza primului vagon

înainte de ciocnire, viteza vagoanelor cuplate imediat după ciocnire, căldura degajată prin ciocnire, timpul și distanța pînă la oprirea vagoanelor cuplate.

R: $v = v_0 - \dfrac{g}{n}\Delta t = 9{,}0$ m/s; $v' = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}v = 3{,}0$ m/s;

$Q = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2v^2}{m_1 + m_2} = 270$ kJ; $\Delta t' = \dfrac{v'}{g/n} = 30$ s; $\Delta x' = \dfrac{v'^2}{2g/n} = 45$ m.

28. Un obuz de masă $M = 70$ kg zboară cu viteza $v = 300$ m/s. La un moment dat el explodează în două fragmente. Unul dintre ele de masă $m_1 = 30$ kg continuă să se miște înainte cu viteza $v_1 = 500$ m/s. Care este viteza celui de-al doilea fragment? Cîtă energie cinetică se creează?

R: $v_2 = \dfrac{Mv - m_1v_1}{M - m_1} = 150$ m/s; $E_c = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1M}{M - m_1}(v - v_1)^2 = 1{,}05$ MJ.

29. O moleculă de masă $m = 5{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, aflată într-un cilindru cu piston, se mișcă cu viteza $v_1 = 500$ m/s și ajunge din urmă pistonul care se mișcă cu viteza $v_2 =$ = 1,0 m/s și de care se ciocnește frontal perfect elastic. Să se afle variația energiei cinetice și a impulsului moleculei în urma ciocnirii.

R: $\Delta E_c = -2mv_2(v_1 - v_2) = -5{,}0 \cdot 10^{-23}$ J; $\Delta p = -2m(v_1 - v_2) =$ $= -5{,}0 \cdot 10^{-23}$ N · s.

30. Două bile de mase m_1 m_2 sînt suspendate pe fire paralele, astfel încît bilele se ating. Prima bilă este deviată pînă la o înălțime h_1 și lăsată liber. La ce înălțime se ridică bilele dacă ciocnirea este: *a)* elastică; *b)* plastică. *c)* Cîtă căldură se degajă în ultimul caz?

R: *a)* $h_1' = h_1\left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$; $h_2' = h_1\left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$;

b) $h' = h_1\left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$; *c)* $Q = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}gh_1$.

31. O particulă de masă m_1 lovește o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. Să se afle ce fracțiune din energia cinetică inițială a particulei *1* este transferată particulei *2*, dacă ciocnirea este unidimensională: *a)* perfect elastică; *b)* plastică. *c)* Ce fracțiune se transformă în căldură în ultimul caz?

R: *a)* $\dfrac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$; *b)* $\dfrac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$; *c)* $\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$.

6

MOMENTUL CINETIC

Alături de mărimile fizice impuls și energie cinetică, momentul cinetic joacă un rol important în fizică, în special în caracterizarea mișcării de *rotație.*

6.1. MOMENTUL FORȚEI. MOMENTUL CINETIC AL PUNCTULUI MATERIAL

6.1.1. **Momentul forței în raport cu un punct.** Dacă un corp are o articulație fixă în jurul căreia se poate roti liber, atunci aplicînd o forță corpului, el se va roti în jurul unei axe trecînd prin articulație. Axa de rotație va fi perpendiculară pe planul definit de articulație și forță (fig. 6.1).

Efectul de rotație este același, oriunde am aplica forța pe dreapta sa suport, de exemplu prin intermediul unui fir mai lung sau mai scurt. Dacă suportul forței trece prin articulație, forța nu poate produce rotație, ci doar trage de articulație.

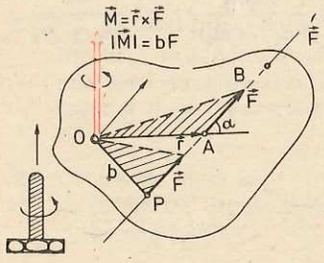


Fig. 6.1. O forță aplicată unui corp, avînd o articulație, îl rotește în jurul unei axe trecînd prin articulație, perpendiculară pe planul definit de forță și articulație. Efectul de rotație este dat de momentul forței în raport cu articulația.

Efectul de rotație este determinat atît de mărimea forței, cît și de distanța dreptei-suport a forței pînă la articulație.

Se numește brațul forței față de un punct distanța de la acel punct pînă la dreapta suport a forței, adică lungimea perpendicularei coborîte din acel punct pe dreapta suport a forței.

De exemplu, dacă înșurubăm o piuliță cu o cheie, efectul depinde atît de mărimea forței aplicate, cît și de brațul forței, adică de lungimea cheii, dacă aplicăm forța la capătul cheii, perpendicular pe cheie.

Prin urmare, efectul de rotație se poate măsura prin produsul dintre forță și brațul ei: $F \cdot b$. Mai mult, ținînd seama de direcția axei de rotație și de sensul rotației produse, putem introduce un *vector* avînd modulul Fb, direcția dată de axa de rotație și sensul pe această axă dat de sensul de înaintare al unui șurub (drept) rotit de forța aplicată (ca și cum corpul ar fi un șurub rotit cu forța $\vec{F}$). Acesta este *vectorul moment al forței* în raport cu articulația.

Poziția forței pe dreapta suport este dată de vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, care formează unghiul α cu vectorul forță $\vec{F}$, atunci brațul forței va fi $b = r \sin \alpha$ și modulul momentului:

$$M = bF = rF \sin (\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha. \tag{6.1}$$

Prin urmare, din doi vectori $\vec{r}$ și $\vec{F}$ se obține un al treilea vector $\vec{M}$ cu modulul $|\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin (\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha$, cu direcția perpendiculară pe cei doi vectori deci pe planul lor $[\vec{r}, \vec{F}]$ și cu sensul pe această direcție dat de sensul de înaintare al unui șurub sau burghiu așezat pe această direcție și rotit de la $\vec{r}$ la $\vec{F}$. Se introduce astfel o nouă operație între vectori (fig. 6.2).

Se numește produs vectorial a doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, notat $\vec{a} \times \vec{b}$, un al treilea vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, avînd modulul $|\vec{c}| = c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin (\vec{a}, \vec{b}) = ab \sin \alpha$, direcția perpendiculară pe planul vectorilor $(\vec{a}, \vec{b})$ deci pe fiecare din ei, iar sensul dat de regula burghiului.

Regula burghiului: se așază burghiul pe direcția respectivă și se rotește astfel încît primul vector $\vec{a}$ să se suprapună peste cel de-al doilea $\vec{b}$, atunci sensul de înaintare al burghiului va fi sensul produsului vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

Din figura 6.2 se vede că *modulul* produsului vectorial, adică $ab \sin \alpha$, este egal cu *aria paralelogramului* construit cu cei doi vectori (de exemplu baza b înmulțită cu înălțimea $a \sin \alpha$).

Produsul vectorial a doi vectori *coliniari* sau *paraleli* este *nul* ($\sin 0° = 0$, $\sin 180° = 0$) (de exemplu dacă $\vec{r}$ și $\vec{F}$ sînt paraleli sau coliniari: forța trece prin articulație).

Dacă schimbăm ordinea factorilor, atunci trebuie să rotim pe $\vec{b}$ către $\vec{a}$, deci se schimbă sensul produsului vectorial. Prin urmare, produsul vectorial este *necomutativ*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \tag{6.2}$$

(se spune în acest caz că produsul este anticomutativ).

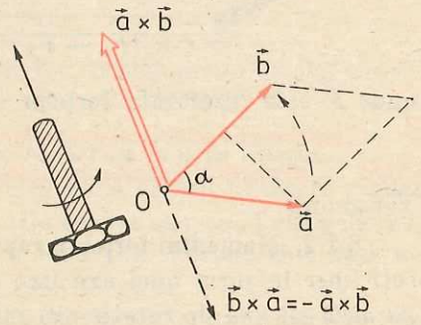


Fig. 6.2. Produsul vectorial a doi vectori $\vec{a} \times \vec{b}$ este un vector cu modulul $ab \sin \alpha$, cu direcție perpendiculară pe $(\vec{a}, \vec{b})$ și cu sensul dat de regula burghiului.

Dacă schimbăm sensul unuia dintre vectori, se schimbă și sensul vectorului produs.

Se poate verifica faptul că produsul vectorial este *distributiv:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \text{ și } (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \quad (6.3)$$

unde, bineînțeles, nu trebuie schimbată *ordinea* factorilor!

Momentul unei forțe în raport cu un punct, numit pol, este definit prin produsul vectorial dintre vectorul de poziție al originii forței față de pol și vectorul forță:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad |\vec{M}| = M = rF \sin \alpha = bF. \quad (6.4)$$

Trebuie reținută *ordinea* factorilor: $\vec{r} \times \vec{F}$ și *nu* $\vec{F} \times \vec{r}$. Dacă schimbăm sensul forței, se schimbă și sensul vectorului moment.

Momentul forței se măsoară în N · m.

(Atenție, produsul N · m nu trebuie înlocuit cu joule, fiindcă nu reprezintă lucrul mecanic.)

Din figura 6.1 se vede că momentul forței nu depinde de poziția forței pe dreapta suport: nu se schimbă nici modulul $rF \sin \alpha = bF$ (dublul ariei triunghiului OAB), nici direcția sau sensul. Momentul forței este zero dacă polul se află pe suportul forței deoarece atunci brațul forței este zero ($\vec{r}$ și $\vec{F}$ sînt paraleli).

Dacă asupra unui punct material P acționează mai multe forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, atunci fiecare forță dă un moment în raport cu un pol O:

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1, \quad \vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2, \ldots, \vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_n, \quad (\vec{r} = \overrightarrow{OP}).$$

Adunînd aceste egalități membru cu membru, avem:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r} \times \vec{F}_n =$$
$$= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \quad (6.5)$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forțelor concurente și $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ — momentul ei.

Suma vectorială a momentelor forțelor concurente în raport cu un pol este egală cu momentul rezultantei acestor forțe în raport cu același pol (teorema lui Varignon).

6.1.2. **Momentul forței în raport cu o axă.** Fie acum un corp care se poate roti liber în jurul unei axe fixe (fig. 6.3). Dacă forța aplicată corpului este *paralelă* cu axa de rotație sau intersectează axa de rotație, ea nu poate roti corpul, ci doar îndoaie axa sau trage de axă. De aceea descompunem forța $\vec{F}$ în două forțe componente: $\vec{F}_{\parallel}$ *paralelă* cu axa de rotație și $\vec{F}_{\perp}$ *perpendiculară* pe axă. Forța componentă $\vec{F}_{\parallel}$ nu poate roti corpul, ci doar îndoaie axa (trage corpul paralel cu axa); momentul ei în raport cu un punct de pe axă ($M_{\perp}$)

este perpendicular pe axa de rotație și tinde să îndoaie axa. Numai forța componentă transversală $\vec{F}_{\perp}$ (perpendiculară pe axa de rotație) poate roti corpul în jurul axei în planul (π) perpendicular pe axă; momentul ei $M_{\parallel} = F_{\perp} \cdot b$ în raport cu punctul C — piciorul perpendicularei din P pe axă, este paralel cu axa și el este acela care rotește corpul în jurul axei.

Momentul unei forțe $\vec{F}$ *în raport cu o axă este egal cu produsul dintre componenta transversală a forței* $F_{\perp}$ *și brațul său* b *pînă la axă, în planul perpendicular pe axă* (π), *prevăzut cu semnul plus sau minus, după cum rotația produsă corespunde sau nu* (după regula burghiului) *sensului pozitiv al axei*: $M_{\parallel} = \pm b \cdot F_{\perp}$.

Dacă luăm momentul forței $\vec{F}$ față de un pol O de pe axă, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, atunci componenta vectorului $\vec{M}$ pe axă va fi tocmai $M_{\parallel} = \pm bF_{\perp}$.

Dacă asupra unui corp acționează mai multe forțe, atunci momentele lor față de același pol se compun după regula paralelogramului, ca orice vectori. Momentele lor în raport cu o axă se adună algebric (ținînd seama de semnul lor). Dacă momentul rezultant în raport cu o axă este nul, corpul va fi în echilibru de rotație față de acea axă.

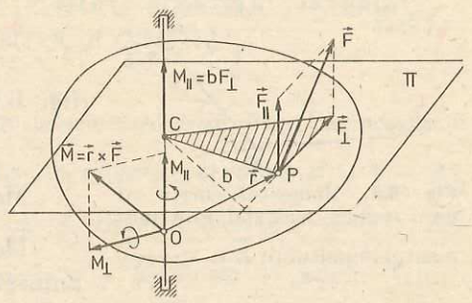


Fig. 6.3. Componenta $F_{\parallel}$ paralelă cu axa de rotație nu produce rotație, momentul ei $M_{\perp}$ este perpendicular pe axă (tinde doar să îndoaie axa). Componenta $F_{\perp}$ perpendiculară pe axă rotește corpul în jurul axei și dă moment în raport cu axa $M_{\parallel} = bF$.

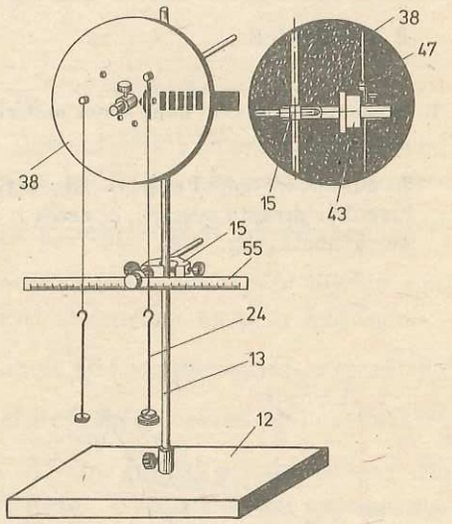


Fig. 6.4. Montaj pentru studiul compunerii momentelor.

Experiment. Compunerea momentelor în raport cu axa de rotație.

Montajul este arătat în figura 6.4. Se aleg două orificii în discul gradat (*38*) în care se introduc cepii de plastic (*47*). De cepi se suspendă cîrligele (*24*) pentru greutăți crestate prin intermediul a două fire. Forțele sînt date de greutățile crestate împreună cu cîrligele și cepii (5 g).

Se calculează momentele celor două forțe în raport cu axul discului; ele sînt de semne opuse și trebuie să fie egale în modul — discul fiind în repaus.

Se schimbă greutățile și orificiile și se repetă experiența.

6.1.3. **Momentul cinetic al punctului material.** Analog momentului unei forțe în raport cu un pol sau o axă, se poate defini momentul oricărui *vector*.

Interes fizic deosebit prezintă momentul *impulsului*.

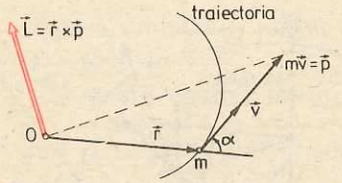


Fig. 6.5. Momentul cinetic al unui punct material este momentul impulsului: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{mv}$.

Momentul cinetic al unui punct material în raport cu un pol este momentul impulsului (fig. 6.5):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{mv}. \qquad (6.6)$$

Momentul cinetic se măsoară în J.s.

Momentul cinetic $\vec{L}$ definit mai sus se mai numeşte moment cinetic *orbital*, deoarece este legat de mişcarea particulei pe *orbita sa*. (Particulele atomice pot avea şi un moment cinetic *propriu* $\vec{S}$ numit spin, atunci momentul cinetic total al particulei va fi $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.)

EXEMPLE

1. Momentul cinetic al unui punct material *izolat*, în raport cu orice pol, *se conservă* (este constant).

   În adevăr, în timpul mişcării sale rectilinii uniforme impulsul $\vec{mv}$ este constant, doar lunecă pe dreapta mişcării, de aceea $L = mv \cdot b = \text{const.}$, la fel, direcţia şi sensul rămîn neschimbate (fig. 6.6).

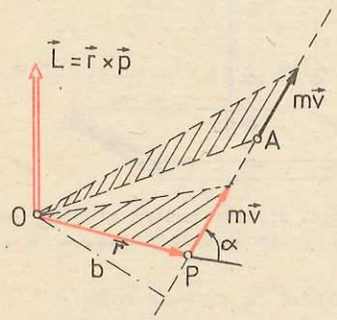


Fig. 6.6. Momentul cinetic al unui punct material izolat, deci în mişcare rectilinie uniformă, în raport cu orice pol, se conservă.

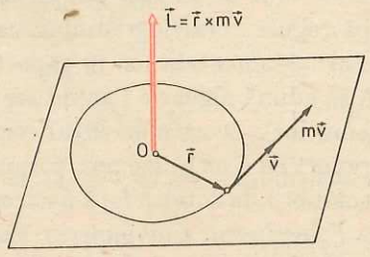


Fig. 6.7. La mişcarea circulară uniformă, momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului se conservă (fiindcă momentul forţei este zero faţă de acest pol).

2. În mişcarea circulară *uniformă*, momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului *se conservă* (fig. 6.7).
   În adevăr, modulul momentului este constant: $L = mvr = mr^2\omega$, iar direcţia şi sensul nu se schimbă.

6.2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC PENTRU PUNCTUL MATERIAL. CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC

Să calculăm variaţia momentului cinetic pe unitatea de timp. La momentul t, momentul cinetic este $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. La un moment apropiat $t' = t + \Delta t$, vectorul de poziţie $\vec{r}$ devine $\vec{r'} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ şi viteza $\vec{v}$ devine $\vec{v'} = \vec{v} + \Delta\vec{v}$, iar impulsul $\vec{p} = \vec{mv}$ devine $\vec{p'} = \vec{mv'} = \vec{p} + \Delta\vec{p} = \vec{mv} + m\Delta\vec{v}$. Atunci momentul cinetic $\vec{L}$ devine:

$$\vec{L'} = \vec{r'} \times \vec{p'} = (\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \Delta\vec{p} + \\ + \Delta\vec{r} \times \vec{p} + \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{p},$$

de unde variaţia momentului cinetic raportată la intervalul de timp respectiv Δt:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{\vec{L'} - \vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times \vec{mv} + \Delta\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

Pentru a găsi variaţia „momentană" (sau „instantanee") a momentului cinetic pe unitatea de timp, facem, după cum ştim, pe Δt să descrească către zero (să tindă către zero: $\Delta t \to 0$), atunci, bineînţeles, şi $\Delta\vec{r}$ şi $\Delta\vec{p}$ descresc către zero, dar raportul $\Delta\vec{r}/\Delta t$ devine viteza momentană $\vec{v}$, iar $\Delta\vec{p}/\Delta t$ devine egal cu forţa $\vec{F}$ (conform principiului II). Atunci ultimii doi termeni din expresia de mai sus se anulează: $\vec{v} \times \vec{mv} = 0$ deoarece sînt vectori coliniari (paraleli), iar ultimul termen se anulează fiindcă factorul $\Delta\vec{p}/\Delta t$ devine egal cu forţa $\vec{F}$, iar factorul $\Delta\vec{r}$ se anulează cînd $\Delta t \to 0$. Rămîne numai primul termen din membrul drept care reprezintă momentul forţei. Obţinem astfel *teorema momentului cinetic* pentru punctul material.

Momentul forţei în raport cu un pol este egal cu variaţia momentului cinetic pe unitatea de timp, în raport cu acelaşi pol.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0, \left(\text{adică } \vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right). \qquad (6.7)$$

Dacă momentul forţei rezultante în raport cu un pol este permanent nul, variaţia momentului cinetic al punctului material va fi zero, adică momentul cinetic în raport cu acel pol *se conservă*. Un punct material nu-şi poate schimba momentul său cinetic decît sub acţiunea unui moment al forţei.

De exemplu în cazul unui punct material *izolat*, $\vec{F} \equiv 0$, deci $\vec{M} \equiv 0$ faţă de orice pol, de aceea momentul cinetic $\vec{L}$ în raport cu orice pol *se conservă*.

In mișcarea circulară *uniformă* forța este *centripetă*, deci momentul ei în raport cu *centrul* cercului este permanent zero, de aceea momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului *se conservă*.

În mișcarea planetelor în jurul Soarelui forța de atracție gravitațională exercitată de Soare asupra planetei trece permanent prin centrul Soarelui, de aceea momentul forței în raport cu Soarele este nul, deci momentul cinetic al planetei în raport cu Soarele se conservă. Analog se întîmplă în mișcarea electronilor în jurul nucleului într-un atom.

Dacă momentul rezultant al unei forțe în raport cu o *axă* este zero, atunci momentul cinetic în raport cu *acea axă se conservă* (este constant).

Analog impulsului, momentul cinetic este și el o măsură a mișcării din punctul de vedere al rotației: teorema momentului cinetic exprimă o lege de conservare a mișcării mecanice, transmise de la un corp la altul prin intermediul momentului forței în procesul interacțiunii. Ecuația (6.7) este analoagă cu ecuația fundamentală a dinamicii: forței îi corespunde momentul forței, iar impulsului îi corespunde momentul impulsului, adică momentul cinetic.

Ecuația (6.7) exprimă legea fundamentală a dinamicii pentru mișcarea de rotație.

6.3. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC TOTAL AL UNUI SISTEM MECANIC. CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC TOTAL

Fie un sistem de două particule (fig. 6.8). Momentele celor două forțe interne $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ și $\vec{\mathcal{F}}_{21} = -\vec{\mathcal{F}}_{12}$ în raport cu un pol O sînt egale în modul și de sensuri opuse $\vec{\mathfrak{M}}_{12} = -\vec{\mathfrak{M}}_{21}$ sau $\vec{\mathfrak{M}}_{12} + \vec{\mathfrak{M}}_{21} = 0$. În adevăr, modulele momentelor sînt egale: $|\vec{\mathcal{F}}_{12}| \cdot b = |\vec{\mathcal{F}}_{21}| \cdot b$ (avînd același braț, b); direcția, este aceeași—perpendiculară pe planul (O, $\vec{\mathcal{F}}_{12}$, $\vec{\mathcal{F}}_{21}$), iar sensurile sînt opuse deoarece forțele $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ și $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ sînt de sensuri opuse.

Momentul rezultant al forțelor interne ale unui sistem de particule, în raport cu orice pol, este nul.

Rezultatul este valabil pentru un sistem format dintr-un număr *oarecare* de particule. În adevăr, forțele interne de interacțiune dintre particulele sistemului sînt totdeauna *perechi*, acțiunea și reacțiunea, egale în modul și de sensuri opuse și acționează pe aceeași dreaptă care unește cele două particule (principiul III). Deci momentele lor, față de orice pol, vor fi egale în modul și de sensuri opuse. De aceea dacă însumăm momentele pentru întregul sistem ele se anulează două cîte două și momentul rezultant va fi nul.

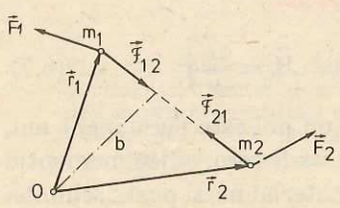


Fig. 6.8. Momentul rezultant al forțelor interne ale unui sistem de particule, în raport cu orice pol, este zero.

Să scriem teorema momentului cinetic pentru fiecare particulă (se consideră mai jos momentele medii pe intervalul de timp Δt):

$$\vec{M}_1 + \vec{\mathfrak{M}}_1 = \frac{\Delta \vec{L}_1}{\Delta t}, \quad \vec{M}_2 + \vec{\mathfrak{M}}_2 = \frac{\Delta \vec{L}_2}{\Delta t},$$

unde $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ sînt momentele forțelor *externe* care acționează asupra particulei *1*, respectiv *2*, iar $\vec{\mathfrak{M}}_1$, $\vec{\mathfrak{M}}_2$ sînt momentele forțelor *interne* care acționează asupra acestor

particule (fig. 6.8). Adunînd membru cu membru cele două ecuații și ținînd seama că momentul rezultant al forțelor interne este nul, obținem:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{\Delta \vec{L}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{L}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)}{\Delta t}.$$

Rezultatul este valabil și pentru un sistem format dintr-un număr *oarecare* de puncte materiale:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \frac{\Delta(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t}, \qquad (6.8)$$

unde $\vec{M}$ este momentul rezultant al forțelor *externe*, iar $\vec{J}$ momentul cinetic total al sistemului.

Proiectînd ecuația (6.8) pe o axă, obținem

$$M_{\parallel} = \frac{\Delta J_{\parallel}}{\Delta t}, \qquad (6.9)$$

unde $M_{\parallel}$ este momentul rezultant în raport cu axa, iar $J_{\parallel}$ este momentul cinetic total în raport cu axa.

Dacă sistemul este *izolat* ($\vec{M} \equiv 0$), momentul cinetic total al sistemului, față de orice pol sau axă, *se conservă*.

Dacă momentul rezultant al forțelor externe în raport cu un pol sau în raport cu o axă este permanent nul, *momentul cinetic total al sistemului în raport cu acel pol sau acea axă se conservă.*

Prin urmare *forțele interne nu pot modifica momentul cinetic total al sistemului* (îl pot doar redistribui între părțile sistemului). Numai prin interacțiune cu mediul exterior se transmite mișcarea și se schimbă momentul cinetic total al sistemului.

Dacă momentul rezultant al forțelor externe aplicate unui corp, în raport cu un punct, este nul, corpul nu se va roti în jurul nici unei axe trecînd prin acel punct. La fel, dacă momentul rezultant al forțelor externe aplicate corpului în raport cu o axă, este nul, corpul nu se va roti în jurul acelei axe (se presupune că inițial corpul nu se rotea în jurul acelei axe).

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. O particulă în mișcare este supusă la o forță a cărei dreaptă suport trece printr-un punct fix. Ce se poate spune despre momentul cinetic al particulei?

R: se conservă față de punctul fix.

2. Se conservă momentul cinetic în raport cu Soarele al unei comete care ocolește Soarele pe o traiectorie parabolică? Dar în cazul planetelor care nu se mișcă pe traiectorii circulare?

R: se conservă.

3. Dacă vectorul moment cinetic al unei particule este constant (se conservă), traiectoria sa este plană. De ce? Dar dacă numai direcția vectorului moment este constantă, cum este traiectoria?

R: $\vec{L}$ are direcție fixă; plană.

4. Asupra unui satelit artificial al Pămîntului acţionează o forţă de frecare cu aerul $\vec{F}_f = -\vec{kv}$. Se conservă momentul său cinetic în raport cu centrul Pămîntului? Rămîne traiectoria sa plană?

R: nu; da.

5*. Se conservă momentul cinetic total al particulelor rezultate în urma exploziei unui corp izolat?

R: da.

6. O particulă se mişcă în vid sub acţiunea forţei de greutate. Momentul cinetic în raport cu orice axă din planul mişcării se conservă. De ce? Ce valoare are?

R: $\vec{G}$ şi $\vec{p}$ sînt incidente cu axa: $M_{\parallel} = L_{\parallel} \equiv 0$.

7*. O particulă suspendată printr-un fir oscilează într-un plan vertical (pendul simplu). Care este momentul cinetic faţă de verticala prin punctul de suspensie? Care este variaţia pe unitatea de timp a momentului cinetic în raport cu punctul de suspensie?

R: zero; $|\Delta\vec{L}/\Delta t| = mgl\sin 0$.

7

CINEMATICA ŞI DINAMICA RIGIDULUI

7.1. NOŢIUNEA DE RIGID

Pe un plan înclinat se lasă să se rostogolească un cilindru gol şi unul plin, cei doi cilindri avînd acelaşi diametru şi aceeaşi masă. Se constată că cilindrul plin ajunge jos într-un timp mai scurt decît cilindrul gol.

Experienţa arată că în acest caz nu mai putem considera corpurile ca puncte materiale; modelul de punct material folosit pînă acum în mecanică nu mai poate explica rezultatul acestei experienţe. Trebuie să luăm în consideraţie forma, dimensiunile şi felul în care este distribuită masa corpurilor.

Un corp cu anumite dimensiuni poate avea în urma acţiunii unei forţe în afara mişcării centrului de masă şi mişcări suplimentare. Aceste mişcări pot fi efectuate de întregul corp sau numai de anumite părţi ale lui şi se suprapun peste mişcarea de translaţie.

Să considerăm un caz simplu, acela în care corpul nu are părţi mobile independente. Punctele materiale din care se consideră alcătuit corpul nu efectuează decît mişcări de ansamblu. Acest corp se numeşte rigid.

Un corp rigid este un sistem de puncte materiale ale căror distanţe reciproce rămîn neschimbate.

Ca şi punctul material, corpul rigid este un model. Acest model poate fi realizat cu bună aproximaţie de o bilă de oţel, de o roată, un cilindru, o bară, un cărucior etc.

7.2. VITEZA ŞI ACCELERAŢIA UNGHIULARĂ

EXPERIMENT

Pe un plan înclinat sau un jgheab, se lasă să se mişte liber o bilă. Bila efectuează o mişcare de translaţie accelerată şi în acelaşi timp efectuează şi o mişcare de rotaţie (fig. 7.1).

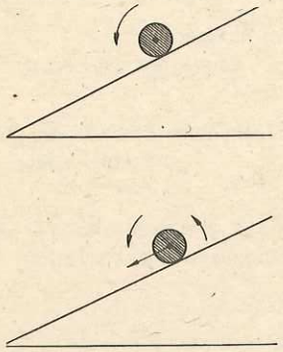


Fig. 7.1. O bilă în mișcare pe un plan înclinat.

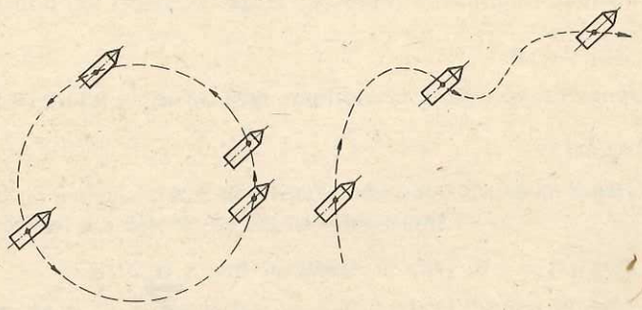


Fig. 7.2. În mișcarea de translație traiectoriile, vitezele și accelerațiile tuturor punctelor corpului sînt identice.

Atît această experiență cît și altele asemănătoare ne arată că un corp rigid se poate afla în mișcare de translație, în mișcare de rotație în jurul unei axe sau într-o mișcare elicoidală, rotație și translație simultan.

Mișcarea de translație a unui corp rigid este mișcarea în care orice dreaptă legată de corp își păstrează orientarea, adică se mișcă paralel cu ea însăși.

În această mișcare toate punctele corpului rigid au traiectorii, viteze și accelerații identice și de aceea această mișcare este determinată prin mișcarea unui singur punct material ce aparține corpului (fig. 7.2).

Mișcarea de rotație a unui rigid este mișcarea în care toate punctele sale descriu cercuri ale căror centre sînt situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul cercurilor descrise, dreaptă numită axă de rotație (fig. 7.3).

Razele vectoare ale punctelor diferite din corpul rigid vor descrie același unghi $\Delta\alpha$ în intervalul de timp Δt. Deci viteza unghiulară ω va fi aceeași pentru toate punctele corpului rigid în rotație:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \qquad (7.1)$$

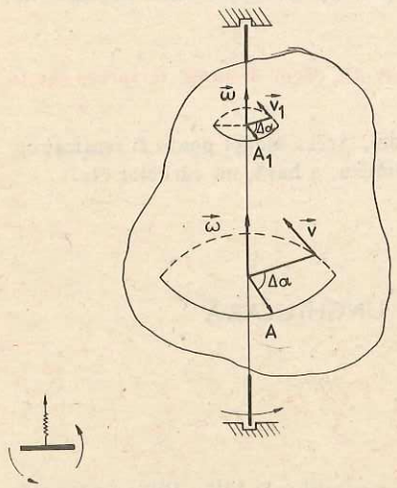


Fig. 7.3. Punctele unui solid rigid aflat în mișcare de rotație descriu cercuri cu centrul pe axa de rotație.

Vitezele liniare ale diferitelor puncte ale rigidului sînt diferite deoarece și razele cercurilor descrise sînt diferite:

$$v_i = \omega r_i. \qquad (7.2)$$

Viteza unghiulară ω este considerată o mărime vectorială, deci poate fi reprezentată printr-un vector. Vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ are direcția axei de rotație, este deci perpendicular pe planul traiectoriei. Sensul acestui vector este determinat prin regula șurubului drept (fig. 7.3).

Datorită relației $v = \omega r$, a felului în care s-a ales direcția și sensul vectorului $\vec{\omega}$, se poate reprezenta viteza liniară $\vec{v}$ a mișcării unuia din punc-

tele ce alcătuiesc rigidul, ca produs vectorial al vectorilor $\vec{\omega}$ și $\vec{r}$.:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (7.3)$$

Vectorul produs vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ este perpendicular pe planul format de cei doi vectori, avînd sensul înaintării unui șurub drept (fig. 7.4). Mărimea acestui vector este $v = \omega r \sin (\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = \omega r$ deoarece unghiul $(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = 90°$.

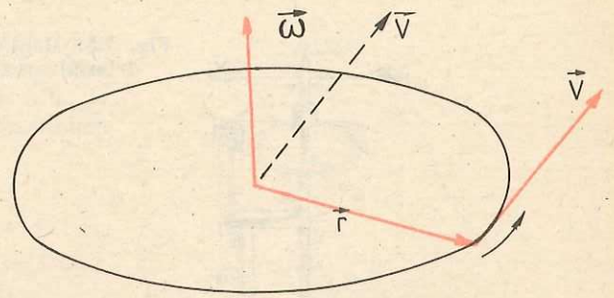


Fig. 7.4. Viteza unghiulară $\vec{\omega}$ este o mărime vectorială.

Dacă vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ este constant în timp, mișcarea de rotație este uniformă.

În cazul în care rigidul se rotește în așa fel încît viteza unghiulară ω crește sau scade în timp, mișcarea de rotație este neuniformă, atunci relația:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (7.4)$$

definește mărimea numită *accelerație unghiulară*. Ca și viteza unghiulară $\vec{\omega}$, accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ se reprezintă printr-un vector și în cazul unei axe de rotație fixe direcția acestui vector este aceeași cu direcția vectorului $\vec{\omega}$. În SI mărimile ω și ε se măsoară în

$$[\omega]_{SI} = \text{rad/s} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ respectiv } [\varepsilon]_{SI} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

EXPERIMENTE

a) Determinarea vitezei unghiulare ω. Se realizează un montaj experimental așa cum arată figura 7.5. Măsurarea timpului în care este descris un unghi oarecare α se realizează cu dispozitivul electrochimic atașat trusei de mecanică sau cu ajutorul unui ceas cu secundar. Montajul electric este cel indicat în figura 7.6. Pe discul gradat din montaj, se fixează două întrerupătoare în sensul rotirii tamburului pentru un anumit unghi α. Acționarea întrerupătoarelor o face un indicator care se rotește cu întregul sistem. De firul trecut peste scripete, se suspendă cîrligul pentru discurile crestate. La un mic impuls, tija cu cele două discuri la capete începe să se rotească aproape uniform. Măsurînd timpul t în care este descris unghiul α se determină viteza unghiulară $\omega = \alpha/t$. Repetînd experiența pentru alte unghiuri, rezultatele obținute pot fi comparate și înscrise într-un tabel de forma:

t(s)	$t_1, t_2 \ldots t$
α (rad)	$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha$
ω (rad/s)	

b) Determinarea accelerației unghiulare ε. La montajul anterior se face o modificare, introducînd peste tamburul cu raza de 20 mm un alt tambur cu raza de 40 mm. Dispozitivul de măsurare a timpului nu mai este folosit acum. Se suspendă cîrligul pentru discurile crestate de firul trecut peste scripete. Pe cîrlig este introdus un disc cu masa de 10 g.

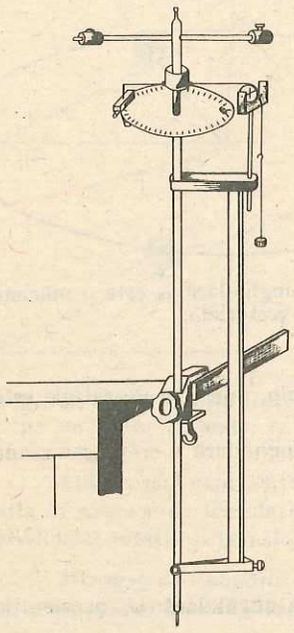


Fig. 7.5. Montaj experimental pentru determinarea vitezei unghiulare.

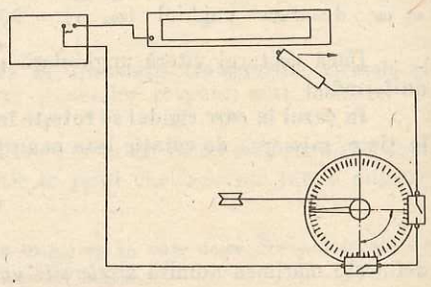


Fig. 7.6. Montajul electric pentru experimentul din figura 7.5.

Pe bara divizată a montajului, se aleg două repere, unul superior și altul inferior care delimitează o distanță h.

Se rotește bara (tija) pînă cînd cîrligul cu discurile crestate ajunge în dreptul reperului superior. Din acest moment sistemul este lăsat liber și se măsoară timpul t în care este parcurs spațiul h. Timpul se măsoară cu ajutorul unui ceas cu secundar sau cu un cronometru. Din ecuațiile mișcării uniform accelerate $\omega = \varepsilon t$ și $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} t^2$, unde $\alpha = h/r$ r fiind raza tamburului, rezultă pentru accelerația unghiulară ε expresia:

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}.$$

7.3. ENERGIA CINETICĂ DE ROTAȚIE. MOMENTUL DE INERȚIE AL UNUI RIGID

EXPERIMENT

Se realizează montajul pentru determinarea vitezei unghiulare (fig. 7.5). Pe cîrlig se așază discuri crestate cu mase de 50 g. Se înfășoară firul pe tambur pînă cînd cîrligul este adus la partea superioară a barei divizate. Se lasă sistemul liber. Acesta va efectua o mișcare de rotație uniform accelerată. După desfășurarea completă a firului, mișcarea de rotație continuă, firul cu discurile crestate urcă, sistemul efectuează un lucru mecanic pentru ridicarea discurilor. Rezultă de aici că în timpul mișcării de rotație la coborîre, variația energiei potențiale a greutății a produs variația energiei cinetice (creșterea acestei energii) a sistemului care a realizat un lucru mecanic, adică ridicarea discurilor.

De cine depinde energia cinetică de rotație?

Să considerăm un rigid care se rotește cu viteza unghiulară, constantă, în jurul unei axe fixe (fig. 7.7). Un punct material de masă m aflat la distanța r de axa de rotație are viteza liniară $v = \omega r$ și energia cinetică:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2.$$

Expresia mr^2 se numește moment de inerție al unui punct material față de o axă.

Dacă însumăm energiile cinetice ale tuturor punctelor rigidului, obținem energia cinetică totală a solidului aflat în mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă ω:

$$E_{c,\,rot} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^{k=n} m_k r_k^2. \quad (7.5)$$

Expresia:

$$I = \sum_{k=1}^{k=n} m_k r_k^2 \quad (7.6)$$

se numește *moment de inerție al rigidului* față de axa de rotație considerată.

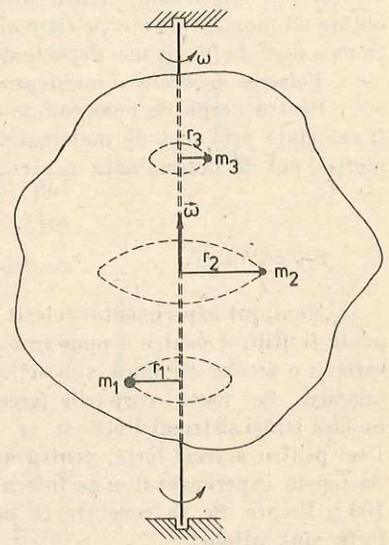


Fig. 7.7. Momentul de inerție al unui rigid este egal cu suma momentelor de inerție ale particulelor componente.

Din definiția momentului de inerție (7.6) rezultă că unitatea de măsură în SI este

$$[I]_{SI} = [m][r^2] = \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Observați că momentul de inerție al unui rigid este egal cu suma momentelor de inerție ale particulelor componente ale rigidului. Din relația (7.5) și ținînd seama de relația (7.6) obținem:

$$E_{c,\,rot} = \frac{1}{2} I\omega^2. \quad (7.7)$$

Pentru un ω dat, energia cinetică de rotație este cu atît mai mare cu cît punctele materiale, care alcătuiesc rigidul, sînt distribuite la distanțe mai mari față de axa de rotație, deci cu cît momentul de inerție este mai mare.

Energia cinetică a unui solid rigid aflat în mișcare de translație și de rotație se poate calcula prin relația:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \quad (7.8)$$

unde m_s reprezintă masa rigidului, v — viteza centrului de masă, I — momentul de inerție față de axa de rotație ce trece prin centrul de masă.

Dacă se face comparație între energia cinetică de translație $E_{c,\,trans} = \frac{1}{2} m_s v^2$ și energia cinetică de rotație, $E_{c,\,rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$ se observă că rolul masei m_s la mișcarea de translație, îl are, la mișcarea de rotație, momentul de inerție I. Valoarea momentului de inerție I depinde nu numai de valoarea maselor punctelor materiale care alcătuiesc rigidul considerat ci și de distanțele (distribuția) lor față de axa de rotație.

La o aceeași masă totală, solidul care are punctele materiale mai depărtate de axă va avea un moment de inerție mai mare. De exemplu, momentul de inerție al unui cilindru gol de grosime neglijabilă, este mai mare decît cel al unui cilindru plin, omogen, de

aceeaşi masă cu primul, ambele calculate faţă de axa lor de simetrie. Aşadar, pentru a obţine un moment de inerţie cît mai mare substanţa din care este format rigidul respectiv trebuie distribuită cît mai departe de axa de rotaţie.

Valoarea momentului inerţie se schimbă dacă se schimbă poziţia axei de rotaţie.

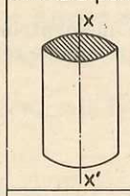
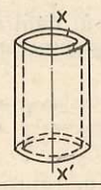
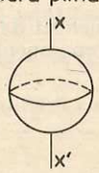
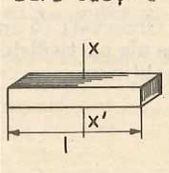
Pentru corpurile omogene de formă geometrică regulată momentele de inerţie pot fi calculate prin metode matematice. Pentru corpurile de formă carecare momentele de inerţie pot fi determinate experimental.

EXPERIMENT

Montajul experimental folosit pentru determinarea acceleraţiei unghiulare (fig. 7.5) poate fi utilizat pentru a pune în evidenţă momentul de inerţie. Se pune sistemul în mişcare cu o acceleraţie mică, sub acţiunea discurilor crestate. Se observă cu atenţie această mişcare. Se mută corpurile (greutăţile) cu şurub de la capetele tijei mai spre centru. Se lasă iarăşi sistemul liber şi se observă că mişcarea are o acceleraţie mai mare. Deci pentru aceeaşi forţă, pentru aceeaşi masă dar altfel distribuită, efectele sînt diferite. Se repetă experimentul şi se înlocuiesc corpurile de pe tijă cu alte două mai mici, de 100 g fiecare. Se va constata că pentru aceleaşi poziţii ale corpurilor, efectele aceleiaşi forţe sînt altele.

Rezultă că într-o mişcare de rotaţie, inerţia sistemului depinde atît de masa lui cît şi de distribuţia acestei mase în raport cu axa de rotaţie. În tabelul următor sînt date expresiile momentelor de inerţie pentru cîteva corpuri rigide, omogene, de formă geometrică regulată faţă de axele de rotaţie indicate.

Tabelul 7.1.

Cilindru plin	Cilindru gol	Inel cilindric	Sferă plină	Bară subţire
				
$I=\frac{1}{2}mR^2$	$I=mR^2$	$I=\frac{1}{2}m(R^2+r^2)$	$I=\frac{2}{5}mR^2$	$I=\frac{1}{12}ml^2$

7.4. LEGILE CINEMATICII ŞI DINAMICII SOLIDULUI RIGID

Să analizăm mişcarea de rotaţie a unui rigid sub acţiunea unei forţe $\vec{F}$ sau a unui sistem de forţe, cînd axa de rotaţie este fixă (fig. 7.8). Asupra fiecărui punct material de masă m_i acţionează forţa $\vec{F}_i$:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}_i \tag{7.9}$$

unde $\vec{a}_i$ este acceleraţia mişcării punctului material sub acţiunea forţei $\vec{F}_i$.

În mişcarea de rotaţie a rigidului în jurul axei fixe, fiecare punct material se poate deplasa numai în planul perpendicular pe axă pe cercul de rază r_i, unde r_i este distanţa de la punctul material m_i pînă la axa de rotaţie. Astfel, pentru a descrie mişcarea de rotaţie a punctului material putem considera numai relaţia între componenta tangenţială F_{it} a forţei $\vec{F}_i$ şi acceleraţia tangenţială a_{it}:

$$F_{it} = m_i a_{it} \tag{7.10}$$

adică ecuaţia (7.9) proiectată pe tangenta la traiectoria circulară a punctului material considerat. Dar:

$$a_{it} = \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \text{ şi } v_i = \omega r_i \text{ şi deci } a_{it} = r_i \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r_i \varepsilon \tag{7.11}$$

unde $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ este *acceleraţia unghiulară*.

Înmulţind ambii membri ai ecuaţiei (7.10) cu r_i şi ţinînd seama de (7.11) avem:

$$r_i F_{it} = m_i r_i^2 \varepsilon. \tag{7.12}$$

După cum am văzut în paragraful 6.1.2 momentul forţei $\vec{F}_i$ faţă de axa de rotaţie este definit de produsul dintre componenta transversală $\vec{F}_{i\perp}$ (proiecţia forţei F_i pe planul perpendicular pe axă) şi braţul acesteia pînă la axă, ceea ce este totuna cu produsul $r_i F_{it}$ dintre componenta tangenţială a forţei şi distanţa de la punctul material la axă. Astfel, notînd $M_{i\parallel} = r_i F_{it}$, membrul stîng din relaţia (7.12) reprezintă valoarea momentului forţei $\vec{F}_i$ faţă de axa de rotaţie. Aşadar, pentru întreg corpul rigid, putem scrie valoarea momentului rezultant faţă de axa de rotaţie:

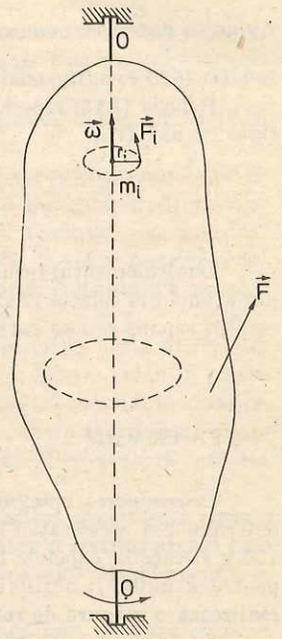


Fig. 7.8. Mişcarea de rotaţie a unui rigid sub acţiunea unei forţe $\vec{F}$.

$$M_{\parallel} = \sum_{i=1}^{n} M_{i\parallel} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

adică:

$$M_{\parallel} = I\varepsilon \tag{7.13}$$

unde $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ este momentul de inerţie al rigidului faţă de axa de rotaţie.

Tot în paragraful 6.1.2 am văzut că momentul unei forţe faţă de o axă este totuna cu proiecţia pe axa respectivă a momentului acelei forţe faţă de un pol de pe axă. Astfel, avînd în vedere că momentul rezultant al forţelor interne faţă de orice pol este nul, în relaţia (7.13) $M_{\parallel}$ reprezintă valoarea momentului rezultant al forţelor externe faţă de axa de rotaţie sau, ceea ce este totuna, proiecţia pe axa de rotaţie a momentului rezultant al forţelor externe faţă de un pol de pe axă.

Observăm că ecuaţia (7.13) reprezintă particularizarea ecuaţiei (6.9) din paragraful 6.3 la cazul rigidului cu axă fixă. Într-adevăr, valoarea momentului cinetic $J_{i\parallel}$ al punctului material m_i faţă de axa de rotaţie este $J_{i\parallel} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega$ de unde rezultă pentru întregul corp rigid:

$$J_{\parallel} = \sum_{i=1}^{n} J_{i\parallel} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = I\omega.$$

Avînd în vedere că momentul de inerţie I este constant şi că $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon$ şi ţinînd cont de ecuaţia (6.9) rezultă ecuaţia (7.13).

Relaţia (7.13) reprezintă legea a II-a a dinamicii pentru mişcarea de rotaţie a unui rigid cu axă fixă.

Acceleraţia unghiulară imprimată de forţele exterioare unui rigid cu axă fixă de rotaţie este direct proporţională cu momentul rezultant al acestor forţe în raport cu axa de rotaţie.

Dacă momentul rezultant al forţelor exterioare faţă de axa de rotaţie este permanent nul atunci din relaţia (7.13) rezultă că acceleraţia unghiulară ε este nulă deci corpul rigid este în repaus sau se roteşte în jurul axei cu o viteză unghiulară ω constantă.

EXPERIMENT

Determinarea momentului de inerţie al unui corp. Realizăm montajul folosit pentru determinarea acceleraţiei unghiulare (fig. 7.5). Se fixează corpurile cu şurub cu masa de 150 g fiecare la capetele barei. Momentul de inerţie al sistemului este suficient de mare pentru a putea fi neglijat momentul de inerţie al barei. Suspendînd de fir cîrligul, se realizează o mişcare de rotaţie uniformă. Se mai pune apoi un corp cu masa $m = 20$ g care va imprima sistemului o acceleraţie unghiulară ε şi o acceleraţie $\vec{a}$ pe verticală. Din legea fundamentală pentru mişcarea de rotaţie $M = I\varepsilon$ rezultă:

$$I = \frac{M}{\varepsilon}.$$

Din $M = Tr$ unde $T = m(g - a)$ (vezi fig. 7.9) şi $a = \frac{2h}{t^2}$ avem $M = mr\,(g - a)$.

Dar, $\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}$ şi înlocuind în expresia momentului de inerţie I vom obţine:

$$I = \frac{mr^2}{2h}\,(gt^2 - 2h).$$

Se măsoară timpul t de cădere, masa m care produce mişcarea uniform accelerată şi spaţiul h pe care se deplasează discul crestat suspendat de cîrlig. Cu valorile obţinute se calculează momentul de inerţie al sistemului.

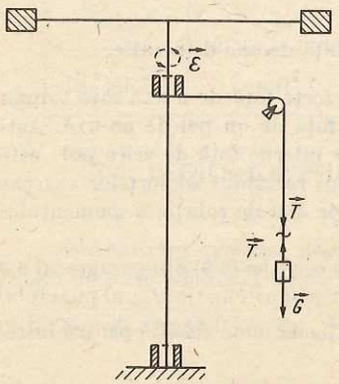


Fig. 7.9. Forţele ce acţionează asupra corpului din experiment.

Volantul. Pentru ca o maşină să funcţioneze în bune condiţii trebuie ca variaţiile vitezei de mişcare să nu depăşească anumite valori stabilite prin construcţie.

La majoritatea maşinilor se cere menţinerea vitezei constante, astfel încît în orice moment să avem egalitate între energia mecanică primită şi energia consumată de maşină.

În cazul variaţiilor periodice ale vitezei din relaţia $M = I\varepsilon$ care poate fi scrisă şi sub forma $M\,\Delta t = I\,\Delta\omega$ rezultă

$$\Delta\omega = \frac{M\Delta t}{I}$$

expresie din care se vede că variaţiile vitezei unghiulare $\Delta\omega$ pentru un moment M al forţei, determinat, sînt cu atît mai mici cu cît momentul de inerţie I al maşinii este mai mare.

Mărirea considerabilă a momentului de inerţie al unei maşini se obţine cu ajutorul unei roţi (disc) mari numită volant, montată pe arborele maşinii.

Volantul reprezintă un „acumulator" de energie cinetică. În decursul unui ciclu de funcţionare al maşinii, în timpul cînd lucrul mecanic al forţelor motoare depăşeşte pe acela al forţelor rezistente, energia cinetică a maşinii creşte şi volantul „acumulează" energie cinetică. Excesul de lucru mecanic al forţelor motoare faţă de cel al forţelor rezistente fiind consumat pentru creşterea energiei cinetice a volantului, acesta va micşora creşterea vitezei maşinii peste valoarea ei medie (de regim).

În timpul cînd lucrul mecanic al forţelor rezistente depăşeşte pe acela al forţelor motoare, energia cinetică a maşinii scade şi deci scade şi viteza maşinii. Volantul „restituie" acum, maşinii, sub formă de lucru mecanic motor, energia cinetică acumulată anterior. O parte din lucrul mecanic al forţelor rezistente consumîndu-se pentru încetinirea volantului, rezultă că în acest interval de timp din ciclul maşinii, volantul micşorează scăderea vitezei sub valoarea ei medie.

În consecinţă, în decursul unui ciclu energetic al maşinii, volantul acumulează energia cinetică în exces pe timpul cît maşina tinde să se ambaleze pentru a o restitui atunci cînd maşina îşi încetineşte mersul, menţinînd astfel variaţiile periodice ale vitezei maşinii în jurul valorii vitezei medii (de regim).

Între mişcarea de translaţie şi mişcarea de rotaţie se poate face un paralelism, o corespondenţă analogică. Mărimile şi ecuaţiile între care se pot stabili corespondenţe sînt date în tabelul care urmează:

Translaţie — **Rotaţie**

CINEMATICA

Mărimea; tipul de mişcare	*Ecuaţia; simbolul*	*Unitatea de măsură*	*Mărimea; tipul de mişcare*	*Ecuaţia; simbolul*	*Unitatea de măsură*
Vectorul deplasare	$\vec{\Delta r}$	m	Unghiul	α	radiani
Timpul	t	s	Timpul	t	s
Viteza	$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$	m/s	Viteza unghiulară	$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$	rad/s
Mişcarea uniformă	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$		Rotaţie uniformă	$\alpha = \alpha_0 + \omega t$	
Acceleraţia	$\vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$	m/s²	Acceleraţie unghiulară	$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	rad/s²
Mişcarea uniform variată	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$		Rotaţie uniform variată	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	
	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$			$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	

DINAMICA

Mărimea;	*Ecuația; simbolul*	*Unitatea de măsură*	*Mărimea;*	*Ecuația; simbolul*	*Unitatea de măsură*
Masa	m	kg	Momentul de inerție	I	kg · m²
Forța	F	N	Momentul forței	M	N · m
Impulsul	$\vec{p} = m\vec{v}$	kg · m/s	Momentul cinetic	$\vec{J}_{\parallel} = I\vec{\omega}$	N · m
	$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\vec{a}$			$\vec{M}_{\parallel} = \frac{\Delta\vec{J}_{\parallel}}{\Delta t} = I\vec{\varepsilon}$	
Energia cinetică	$E_c = \frac{1}{2} mv^2$	J	Energia cinetică	$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2$	J

PROBLEME REZOLVATE

1. Pe un plan înclinat de unghi α (fig. 7.10) se lasă liber din punctul cel mai înalt al planului un corp rotund și omogen (cilindru, sferă) de masă m, rază R și moment de inerție I. Se cer: *a)* forța de frecare și coeficientul de frecare minim dintre corp și plan astfel încît corpul să se rostogolească fără să alunece pe plan; *b)* accelerația cu care se deplasează corpul pe plan; *c)* accelerația unghiulară.

Rezolvare. a) Pentru ca între corp și planul înclinat să nu existe alunecare trebuie îndeplinite condițiile:

$$mg \sin \alpha - F_f = ma$$
$$mg \cos \alpha - N = 0$$
$$F_f R = I\varepsilon$$
$$a = \varepsilon R.$$

De unde rezultă:

$\varepsilon = \frac{a}{R}$ din ultima relație și $F_f R = I \frac{a}{R} \Rightarrow F_f = I \frac{a}{R^2}$ sau $a = F_f \frac{R^2}{I}$.

Înlocuind în prima ecuație: $mg \sin \alpha - F_f = mF_f \frac{R^2}{I}$ rezultă:

$$mg \sin \alpha = F_f \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right); \quad F_f = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR^2}{I}}.$$

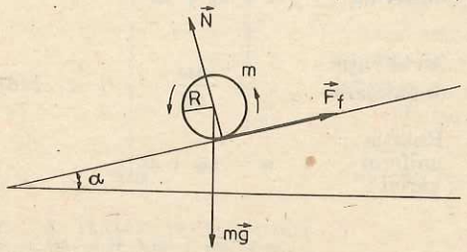


Fig. 7.10. Pentru problema rezolvată 1.

Iar condiția de nealunecare: $F_f < \mu N = \mu mg \cos \alpha$ adică

$$\mu > \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{mR^2}{I}},$$

sau $\operatorname{tg} \alpha < \mu \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$.

b) Din relațiile de mai sus: $a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}$.

c) $\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{g \sin \alpha}{R + \frac{RI}{mR^2}} = \frac{g \sin \alpha}{R + \frac{I}{mR}}$.

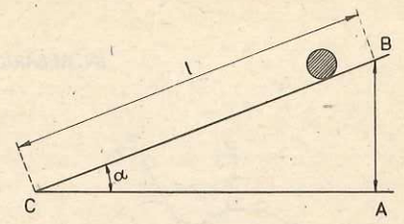


Fig. **7.11.** Pentru problema rezolvată 2.

2. Să se determine accelerația cu care se deplasează o sferă care se rostogolește, fără alunecare, pe un plan înclinat de un unghi $\alpha = 30°$.

Rezolvare. În vîrful planului înclinat la înălțimea h față de planul orizontal (fig. 7.11) sfera are energia potențială maximă $E_p = mgh$, iar la baza planului această energie se transformă în energie cinetică. Considerînd sistemul izolat, din legea transformării și conservării energiei rezultă $E_c = E_p$. Energia cinetică a sferei este determinată de energia cinetică de rotație și de energia cinetică de translație, adică:

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

dar $\omega = \frac{v}{R}$ (R este raza sferei), deoarece viteza de translație a centrului sferei (centrul de masă) este egală cu viteza periferică cu care se rotește sfera față de centrul său și deci putem scrie:

$$E_c = \frac{Iv^2}{2R^2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right).$$

Din egalitatea $E_c = E_p$ se obține $\frac{v^2}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right) = mgh$, de unde rezultă

$$v^2 = \frac{2mgh}{\frac{I}{R^2} + m}.$$

Din ecuația vitezei în mișcarea accelerată $v = \sqrt{2al}$ se obține valoarea accelerației $a = \frac{v^2}{2l}$ și înlocuind valoarea lui v^2 se obține:

$$a = \frac{mg}{\frac{I}{R^2} + m} \cdot \frac{h}{l}.$$

Dar $h = l \sin \alpha$ și se obține pentru accelerație

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{I}{R^2} + m}.$$

Știind că momentul de inerție al sferei este $I = \frac{2}{5} mR^2$, expresia accelerației devine: $a = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{\frac{2}{5} mR^2}{R^2} + m} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$ și pentru că $\sin 30° = \frac{1}{2}$ valoarea accelerației este $a = 3{,}5$ m/s².

Ca și în cazul mișcării de translație, valoarea accelerației în cazul rostogolirii pe plan nu depinde de masa sferei ci numai de înclinarea planului.

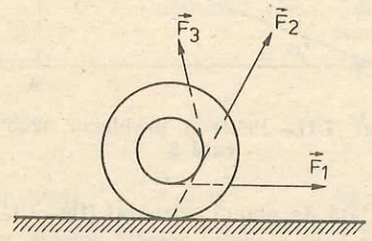


Fig. **7.12.** Pentru problema 3.

1. Imaginați-vă un punct pe obada unei roți în mișcare. Dacă roata se mișcă cu viteză unghiulară constantă, are punctul considerat o accelerație normală? Dar tangențială?

2. Se fac experimente cu o sferă omogenă din lemn și cu 2 plane înclinate de unghiuri diferite. Sfera e pusă, pe rînd, pe fiecare plan la aceeași înălțime. Pe care dintre plane viteza la bază este mai mare? Cum vor fi timpii de mișcare? (Sfera se rostogolește fără alunecare.)

R: $v_1' = v_2'$, $t_1/t_2 = (\sin \alpha_2)/(\sin \alpha_1)$.

3. Un mosor avînd un fir subțire înfășurat pe el (fig. 7.12) poate fi acționat succesiv prin intermediul firului de trei forțe după direcțiile indicate în figură. Indicați direcțiile de mișcare posibile ale mosorului pentru fiecare dintre cele trei forțe.

4. Se măsoară viteza unghiulară a unui disc de pick-up și se găsește valoarea $n = 33$ rot/min. Care este viteza liniară a două puncte de pe disc unul aflat la distanța $r_1 = 14{,}9$ cm și altul la distanța $r_2 = 7{,}3$ cm de centrul discului?

R: $v = \omega r = 2\pi rn = 305$ cm/min; 152 cm/min.

5. Viteza unui automobil cu diametrul roților $D = 76$ cm este $v = 96{,}6$ km/h. *a)* Care este viteza unghiulară a roților? *b)* Roțile sînt frînate uniform în timpul a $N = 30$ de rotații. Care este accelerația unghiulară? *c)* Pe ce distanță s-a deplasat automobilul în timpul frînării?

R: $\omega_0 = 2v/D \approx 70$ rad/s; $\varepsilon = \omega_0^2/4\pi N \approx -13$ rad/s²; $s = \pi ND \approx 73$ m.

6. Discul unui pick-up se rotește cu $n = 78$ rot/min. La un moment dat discul încetinește și se oprește după $t_m = 30$ s de la deconectarea motorului. *a)* Să se calculeze accelerația unghiulară a mișcării încetinite. *b)* Numărul de rotații efectuate de disc în acest timp.

R: $\varepsilon = 2\pi n/t_m = 0{,}27$ rad/s²; $N = nt_m/2 = 20$ rotații.

8

ECHILIBRUL MECANIC AL CORPURILOR

8.1. SISTEM DE FORȚE CONCURENTE. REZULTANTA. MIȘCAREA DE TRANSLAȚIE (REDUCEREA LA UN PUNCT MATERIAL)

Starea de echilibru sau de mișcare a unui corp depinde de caracterul legăturilor mecanice cu celelalte corpuri, adică de apăsările, atracțiile sau respingerile ce rezultă din acțiunile lor reciproce. După cum știm, corpurile din natură acționează unele asupra altora reciproc, aceste interacțiuni fiind caracterizate prin forțe, care sînt mărimi vectoriale.

Dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe spunem că acestea formează un *sistem de forțe*. Cînd suporturile forțelor se întîlnesc în același punct, forțele sînt *concurente*.

Să considerăm un corp asupra căruia acționează sistemul de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$ aplicate în punctele A, B și C (fig. 8.1). Dacă se înlocuiește sistemul de forțe dat prin alt sistem, care produce aceleași efecte asupra corpului ca și sistemul inițial, spunem că cele două *sisteme de forțe sînt echivalente*. Două sisteme de forțe echivalente cu un al treilea sînt și ele echivalente. Dacă sistemul dat este echivalent cu o singură forță, aceasta este *rezultanta* sistemului de forțe.

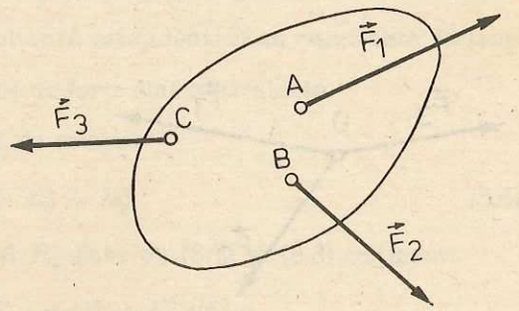


Fig. 8.1. Forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$ care acționează simultan asupra unui solid constituie un sistem de forțe.

Rezultanta forțelor se obține prin operația de compunere a forțelor, care este identică cu operația de compunere a vectorilor cunoscută din paragraful 1.6.

În cazul cînd corpul este un punct material, adică dimensiunile lui sînt neglijabile, distanțele dintre punctele de aplicație ale forțelor fiind foarte mici, acestea se pot confunda cu un singur punct pe care îl notăm cu O (fig. 8.2). Rezultă că forțele care acționează asupra unui punct material sînt concurente.

Ca urmare a neglijării dimensiunilor corpului, acesta nu poate efectua mișcări de rotație în jurul vreunei axe trecînd prin el însuși. Punctul material poate efectua numai mișcări de translație sub acțiunea forțelor care acționează asupra lui.

8.1.1. **Compunerea forțelor prin metoda analitică.** Asupra metodelor grafice de compunere a forțelor, cum ar fi metoda paralelogramului sau metoda poligonului forțelor, nu vom mai insista ele fiind cunoscute din paragraful 1.6, unde au fost aplicate pentru compunerea vectorilor. Vom prezenta numai metoda analitică de compunere a forțelor.

Metoda analitică de compunere a forțelor se bazează pe noțiunea de proiecție a forței pe o axă.

Proiectăm o forță $\vec{F}$ pe axele perpendiculare Ox și Oy, ducînd din extremitățile A și B ale forței, perpendiculare pe aceste axe (fig. 8.3).

Componentele forței $\vec{F}$ pe axele de coordonate Ox și Oy sînt date de formulele:

$$F_x = F\cos\alpha; \qquad F_y = F\sin\alpha. \tag{8.1}$$

Vom aplica metoda analitică pentru determinarea rezultantei a două forțe coplanare $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care fac între ele unghiul α. Metoda comportă următoarele etape:

1. Se ia un sistem de axe perpendiculare xOy orientat astfel încît axa Ox să aibă orientarea uneia dintre forțe. Apoi se proiectează fiecare forță pe cele două axe (fig. 8.4) și se obține:

$$F_{1x} = F_1; \qquad F_{1y} = 0,$$
$$F_{2x} = F_2\cos\alpha; \qquad F_{2y} = F_2\sin\alpha.$$

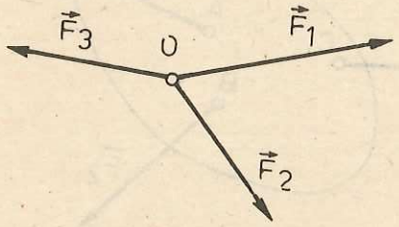


Fig. 8.2. Forțele care acționează asupra unui punct material sînt forțe concurente.

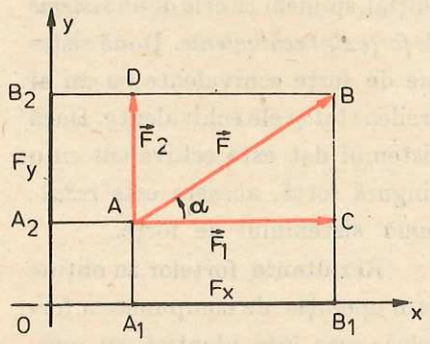


Fig. 8.3. Componentele forței $\vec{F}$ pe axele de coordonate Ox și Oy sînt date de relațiile: $F_x = F\cos\alpha$; $F_y = F\sin\alpha$.

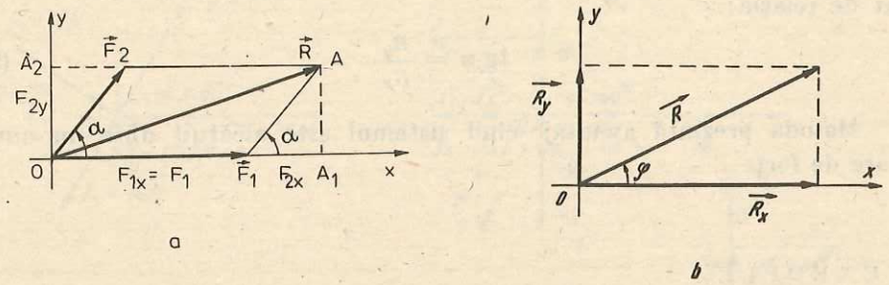


Fig. 8.4. *a)* Suma componentelor forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ pe axele de coordonate este egală cu componentele rezultantei $\vec{R}$, pe aceleași axe. *b)* Sistemul de forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ este înlocuit cu sistemul de forțe echivalent $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$. Aceste sisteme de forțe admit aceeași rezultantă $\vec{R}$.

În paragraful 1.6 s-a demonstrat că orice sumă de vectori poate fi proiectată pe o axă oarecare și se obține o sumă corespunzătoare pentru proiecțiile vectorilor. Proiecția rezultantei fiind egală cu suma proiecțiilor forțelor. Aplicăm acest rezultat și în cazul forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$. După cum rezultă și din figura 8.4, *a*, suma componentelor forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, pe axele Ox și Oy este egală cu componenta rezultantei $\vec{R}$, pe aceleași axe, deci:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 + F_2\cos\alpha, \tag{8.2}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + F_2\sin\alpha. \tag{8.3}$$

2. Sistemul inițial de forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ este înlocuit cu un sistem echivalent de forțe $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$, care fac între ele un unghi drept (fig. 8.4,*b*). Rezultanta $\vec{R}$, a acestor două forțe este dată de diagonala dreptunghiului care are forțele $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$ drept laturi. Această rezultantă este identică cu rezultanta forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, deoarece cele două sisteme de forțe sînt echivalente.

Modulul rezultantei $\vec{R}$ este dat de relația:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2. \tag{8.4}$$

Înlocuind în (8.4) valorile lui R_x și R_y date de (8.2) și (8.3) obținem:

$$R^2 = (F_1 + F_2\cos\alpha)^2 + F_2^2\sin^2\alpha,$$

sau, după efectuarea calculelor:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha. \tag{8.5}$$

Unghiul φ, care dă orientarea rezultantei R faţă de axa Ox (fig. 8.4, *b*) este dat de relaţia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_y}{R_x}. \tag{8.6}$$

Metoda prezintă avantaj, cînd sistemul este alcătuit dintr-un număr mare de forţe.

EXEMPLE

1. Asupra unui punct material acţionează un sistem de forţe alcătuit din cinci forţe concurente, aşa cum se indică în figura 8.5, *a*. Să se determine rezultanta acestui sistem de forţe.

Rezolvare. În cazul acestui exemplu este avantajos să se aleagă axa Ox pe direcţia forţei $\vec{F}_1$ şi axa Oy pe direcţia forţei $\vec{F}_5$ (fig. 8.5, *b*). Se descompune fiecare forţă în două componente după direcţiile axelor Ox şi Oy (fig. 8.5, *b*). În locul celor cinci forţe, orientate după direcţii oarecare, am obţinut şapte forţe colineare pe două axe perpendiculare. Valoarea numerică a rezultantei forţelor pe direcţiile Ox şi Oy este egală cu suma algebrică a valorilor numerice a forţelor componente:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{5x},$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{5y}.$$

Astfel sistemul dat a fost redus la două forţe R_x şi R_y, care au direcţiile perpendiculare. Rezultanta acestor forţe este dată de diagonala dreptunghiului care are ca laturi forţele R_x şi R_y (fig. 8.5, *c*). Mărimea rezultantei este dată de relaţia:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Pentru efectuarea calculelor este foarte comod să se folosească tabelul următor:

Forţa (N)		Componenta pe axa Ox (N)	Componenta pe axa Oy (N)
F_1	15	$15 \cos 0° = 15$	$15 \sin 0° = 0$
F_2	12	$12 \cos 60° = 6$	$12 \sin 60° = 10{,}39$
F_3	10	$-10 \cos 37 = -8$	$10 \sin 37° = 6$
F_4	10	$-10 \cos 60° = -5$	$-10 \sin 60° = -8{,}66$
F_5	1,73	$1{,}73 \cos 90° = 0$	$-1{,}73 \sin 90° = -1{,}73$
		$R_x = \sum_{i=1}^{5} F_{ix} = 8$ N;	$R_y = \sum_{i=1}^{5} F_{iy} = 6$ N

Valoarea numerică a rezultantei este dată de relaţia:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ N}.$$

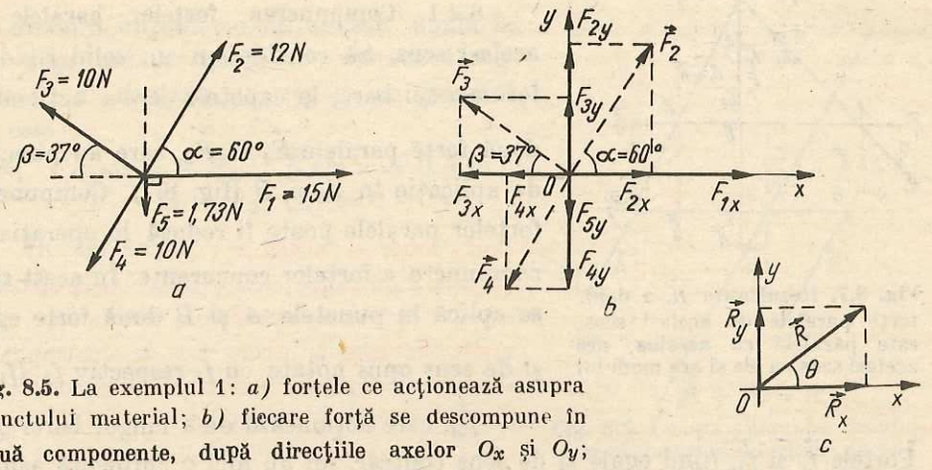


Fig. 8.5. La exemplul 1: *a)* forţele ce acţionează asupra punctului material; *b)* fiecare forţă se descompune în două componente, după direcţiile axelor Ox şi Oy; *(c* rezultanta $\vec{R}$ a forţelor este diagonala dreptunghiului

Unghiul de orientare al rezultantei faţă de axa Ox este dat de relaţia:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{6}{8} = 0{,}75; \quad \theta = 37°.$$

2. Să se determine rezultanta a trei forţe coplanare şi concurente care au valorile numerice $F_1 = F_2 = F_3 = 200$ N. Unghiul dintre prima şi a doua forţă este egal cu unghiul dintre a doua şi a treia forţă şi egal cu 60° (fig. 8.6, *a*).

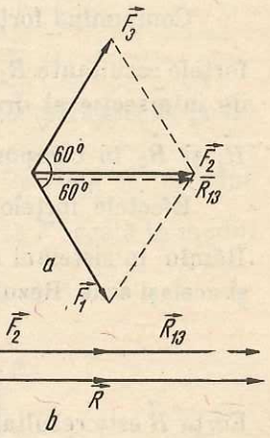


Fig. 8.6. La exemplul 2.

Rezolvare. Compunem mai întîi forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_3$ după regula paralelogramului (fig. 8.6, *a*). Rezultanta $\vec{R}_{13}$, a forţelor $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_3$, are aceeaşi direcţie, sens şi valoare numerică ca şi forţa $\vec{F}_2$. Valoarea numerică a rezultantei sistemului de forţe este:

$$R = R_{13} + F_2 = 400 \text{ N}$$

8.2. COMPUNEREA FORŢELOR PARALELE, CUPLUL DE FORŢE. MIŞCAREA DE ROTAŢIE (IREDUCTIBILITATEA LA PUNCT MATERIAL)

Considerăm un solid rigid, adică un sistem mecanic în care distanţele dintre elementele care îl alcătuiesc nu se modifică în procesul mişcării mecanice. Solidul rigid, sub acţiunea unui sistem de forţe poate efectua o mişcare de translaţie, o mişcare de rotaţie sau amîndouă mişcările simultan. Considerăm că solidul este acţionat de un sistem de forţe paralele. Vom determina rezultanta sistemului de forţe paralele în două cazuri particulare.

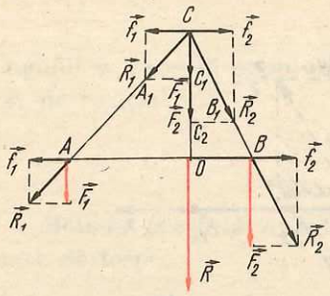


Fig. 8.7. Rezultanta $\vec{R}$, a două forțe paralele de același sens, este paralelă cu acestea, are același sens ca ele și are modulul $R = F_1 + F_2$.

8.2.1. **Compunerea forțelor paralele de același sens.** Să considerăm un solid rigid de forma unei bare, la capetele căreia acționează două forțe paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, care au punctele de aplicație în A și B (fig. 8.7). Compunerea forțelor paralele poate fi redusă la operația de compunere a forțelor concurente. În acest scop se aplică în punctele A și B două forțe egale și de sens opus notate cu $\vec{f}_1$ respectiv $\vec{f}_2$ ($\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$), care acționează de-a lungul barei AB. Forțele $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$, fiind egale și de sens contrar, nu au nici o influență asupra stării de mișcare sau de repaus a solidului rigid.

Compunînd forțele $\vec{f}_1$, $\vec{F}_1$ și $\vec{f}_2$, $\vec{F}_2$ după regula paralelogramului, obținem forțele rezultante $\vec{R}_1$ respectiv $\vec{R}_2$. Deplasăm forțele $\vec{R}_1$ și $\vec{R}_2$ pînă în punctul C de intersecție al dreptelor lor suport. În acest punct descompunem forțele $\vec{R}_1$ și $\vec{R}_2$ în componentele lor inițiale.

Efectele forțelor $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$ anulîndu-se reciproc, le eliminăm din sistem. Rămîn în sistemul de forțe numai $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care au aceeași dreaptă suport și același sens. Rezultanta lor are deci modulul:

$$R = F_1 + F_2.$$

Forța $\vec{R}$ este rezultanta forțelor paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ aplicate în A și B. Punctul O de aplicație al forței $\vec{R}$, îl determinăm ținînd seamă de asemănarea triunghiurilor AOC și A_1C_1C, și a triunghiurilor BOC și B_1C_2C.

Dacă notăm AO cu b_1 și OB cu b_2, din asemănarea triunghiurilor amintite mai sus, obținem:

$$\frac{b_1}{f_1} = \frac{OC}{F_1} \text{ și } \frac{b_2}{f_2} = \frac{OC}{F_2}.$$

Împărțind relațiile de mai sus membru cu membru, obținem:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{F_2}{F_1} \text{ sau } F_1 b_1 = F_2 b_2. \qquad (8.7)$$

Relația (8.7) ne permite să determinăm poziția punctului de aplicație O, al rezultantei $\vec{R}$. Această relație este independentă de schimbarea direcției forțelor paralele în raport cu solidul. Dacă forțele paralele sînt rotite față

de direcția inițială cu un anumit unghi β, așa cum indică figura 8.8, momentul rezultant al forțelor în raport cu punctul C, este:

$$F_1 \cdot CA \sin\alpha - F_2 \cdot CB \sin\alpha = 0, \text{ sau}$$
$$F_1 \cdot CA - F_2 \cdot CB = 0.$$

În concluzie, *rezultanta a două forțe paralele și de același sens, aplicate aceluiași solid, este o forță paralelă și de același sens cu componentele și are modulul egal cu suma modulelor componentelor. Punctul de aplicație al rezultantei împarte segmentul de dreaptă care unește punctele de aplicație ale componentelor în două segmente invers proporționale cu modulele forțelor componente.*

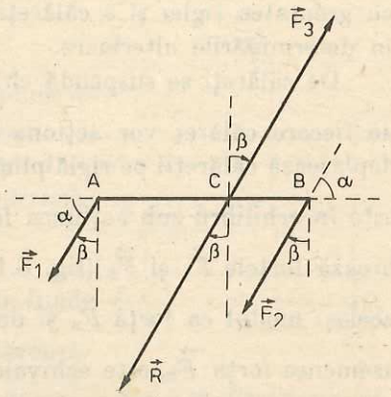


Fig. 8.8. Poziția punctului de aplicație al rezultantei forțelor paralele este independentă de schimbarea direcției forțelor paralele în raport cu solidul asupra căruia acționează.

EXPERIMENTE

Pentru verificarea experimentală a compunerii forțelor paralele, se poate folosi dispozitivul prezentat în figura 8.9.

Se suspendă rigla gradată *1*, de dinamometrul *2*. Pe riglă se introduc călăreți, notați pe figură cu *3*. Dinamometrul indică o forță $\vec{F}'$ egală în modul

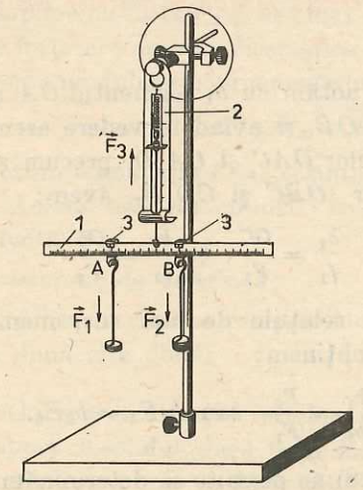


Fig. 8.9. Dispozitiv pentru studiul compunerii forțelor paralele.

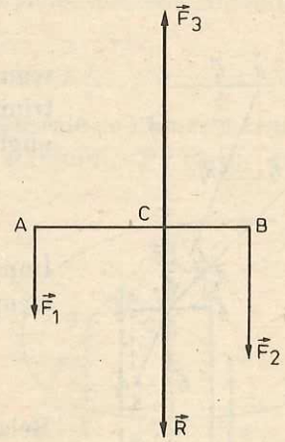


Fig. 8.10. Rezultanta forțelor paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ este o forță paralelă cu forțele componente și de modul egal cu suma modulelor componentelor.

cu greutatea riglei și a călăreților. Se ține seamă de mărimea acestei forțe în determinările ulterioare.

De călăreți se suspendă cîrlige cu discuri crestate. Discurile suspendate de fiecare călăreț vor acționa asupra riglei cu forțele $\vec{F}_1$ respectiv $\vec{F}_2$. Se deplasează călăreții pe riglă pînă se obține poziția orizontală a acesteia. Rigla este în echilibru sub acțiunea forțelor paralele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$. Forța $\vec{F}_3$ echilibrează forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ (fig. 8.10). Forța $\vec{R} = -\vec{F}_3$, de același suport și de același modul ca forța $\vec{F}_3$ și de sens opus acesteia, care poate echilibra de asemenea forța $\vec{F}_3$, este echivalentă cu sistemul de forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$. Forța $\vec{R}$ este deci rezultanta forțelor paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, și experimentul demonstrează că:

a) forța $\vec{R}$ are aceeași direcție și același sens ca și forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, deoarece $\vec{R} = -\vec{F}_3$;

b) $R = F_1 + F_2$.

8.2.2. **Compunerea forțelor paralele de sens opus.** Pentru compunerea forțelor paralele de sens opus vom proceda la fel ca la compunerea forțelor paralele de același sens (fig. 8.11). Conform figurii 8.11, rezultă că:

a) forța rezultantă $\vec{R}$ *are direcția forțelor* $\vec{F}_1$ *și* $\vec{F}_2$ *și sensul forței* $\vec{F}_2$, *adică sensul forței celei mai mari;*

b) modulul forței $\vec{R}$ *este egal cu diferența modulelor forțelor componente:*

$$R = F_2 - F_1.$$

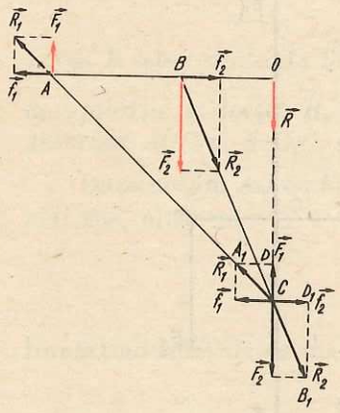


Fig. 8.11. Rezultanta $\vec{R}$, a două forțe paralele de sens contrar, este o forță paralelă cu acestea și are sensul forței celei mai mari. Modulul rezultantei este $R = F_2 - F_1$.

Dacă notăm cu b_1 segmentul OA și cu b_2 segmentul OB, și avînd în vedere asemănarea triunghiurilor OAC și CA_1D, precum și a triunghiurilor OBC și CD_1B_1, avem:

$$\frac{b_1}{f_1} = \frac{OC}{F_1}, \text{ și } \frac{b_2}{f_2} = \frac{OC}{F_2}.$$

Împărțind relațiile de mai sus, membru cu membru, obținem:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ sau } b_1F_1 = b_2F_2. \qquad (8.8)$$

Relația (8.8) ne permite să determinăm poziția punctului de aplicație al rezultantei. Pe figura 8.11 se observă că el este în afara segmentului AB ce unește punctele de aplicație ale componentelor, și situat de partea forței celei mai mari.

Pentru verificarea experimentală a compunerii forțelor paralele de sens opus vom folosi dispozitivul prezentat în figura 8.9. Rigla folosită în acest dispozitiv este în echilibru sub acțiunea forțelor paralele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$.

Forțele paralele $\vec{F}_1$, F_2 și $\vec{F}_3$ (fig. 8.12) fiind în echilibru, putem spune că forța $\vec{F}_2$ echilibrează forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$ și că forța $\vec{R} = -\vec{F}_2$ este rezultanta forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$:

$$\vec{R} = -\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3.$$

Modulul rezultantei este dat de relația:

$$R = F_3 - F_1.$$

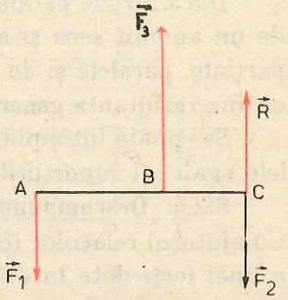


Fig. 8.12. Rezultanta forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$, paralele și de sens opus, este paralelă cu forțele componente și are sensul forței celei mai mari în modul. Modulul rezultantei este egal cu diferența modulelor componentelor.

8.2.3. **Compunerea unui număr oarecare de forțe paralele.** Fie un sistem de forțe paralele de același sens $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, care acționează asupra unui solid (fig. 8.13). Se compun forțele două cîte două. Se compun mai întîi forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$. Apoi rezultanta $\vec{R}_1$ se compune cu forța $\vec{F}_3$. Noua rezultantă $\vec{R}_2$ se compune cu forța $\vec{F}_4$ și așa mai departe. Rezultanta generală $\vec{R}$ a sistemului de forțe are aceeași direcție ca și componentele sale; modulul său este egal cu suma modulelor componentelor:

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.$$

Punctul de aplicație C al rezultantei generale se numește *centrul forțelor paralele*. Acesta este un punct fix al solidului, a cărui poziție este independentă de:

a) sistemul de referință;

b) ordinea în care se compun forțele paralele, două cîte două;

c) schimbarea direcției forțelor paralele în raport cu solidul (dacă toate forțele paralele se rotesc cu același unghi în raport cu solidul);

d) modificarea modulelor forțelor paralele în același raport (spre exemplu dacă toate modulele se micșorează sau se măresc de n ori în raport cu valoarea lor inițială).

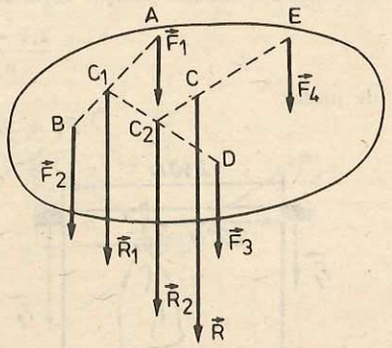


Fig. 8.13. Rezultanta unui sistem de forțe paralele este aplicată într-un punct numit centrul forțelor paralele.

Dacă forţele paralele nu au toate acelaşi sens, se compun mai întîi forţele de un anumit sens şi apoi forţele de sens contrar. Se obţin două rezultante parţiale, paralele şi de sens opus. Prin compunerea rezultantelor parţiale se obţine rezultanta generală, cu punctul de aplicaţie în centrul forţelor paralele.

Se poate întîmpla ca rezultantele parţiale de sensuri opuse să aibă modulele egale şi suporturile diferite, atunci ele alcătuiesc un *cuplu de forţe.*

8.2.4. **Descompunerea unei forţe în două componente paralele cu ea.** Cu ajutorul relaţiilor (8.7) şi (8.8) se pot rezolva problemele de descompunere a unei forţe date în două forţe paralele cu forţa dată şi orientate în acelaşi sens sau în sens opus.

EXEMPLE

1. Extremităţile unei bare de masă neglijabilă şi de lungime $l=2{,}4$ m sînt aşezate pe doi stîlpi. La distanţa $b_1 = 1{,}6$ m de unul dintre stîlpi, se suspendă un corp cu greutatea $G = 640$ N. Să se calculeze forţele de apăsare pe fiecare dintre stîlpi.

Rezolvare. Fie $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ forţele care se exercită pe stîlpii care susţin bara (fig. 8.14). Conform relaţiei (8.7), avem:

$$\frac{b_1}{l-b_1} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ sau } \frac{b_1}{l-b_1+b_1} = \frac{F_2}{F_1+F_2},$$

cum $F_1 + F_2 = G$ obţinem:

$$F_2 = 427 \text{ N}; \; F_1 = 213 \text{ N}.$$

2. Extremitatea unei bare de greutate neglijabilă şi de lungime $l = 2{,}4$ m este fixată într-un perete. La distanţa $d = 1{,}6$ m de perete, bara este susţinută de un stîlp (fig. 8.15). La extremitatea liberă a barei acţionează o forţă $F = 640$ N. Să se calculeze forţele cu care bara apasă asupra peretelui şi asupra stîlpului.

Rezolvare. Forţa $\vec{F}$, aşa cum rezultă din enunţ, este descompusă în două componente paralele şi de sens opus. Mărimile acestor componente le calculăm folosind relaţia (8.8):

$$\frac{l}{l-d} = \frac{F_2}{F_1} \text{ sau } \frac{2{,}4}{0{,}8} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Din această ultimă relaţie obţinem:

$$\frac{2{,}4-0{,}8}{0{,}8} = \frac{F_2-F_1}{F_1},$$

de unde

$$F_1 = 320 \text{ N}; \; F_2 = 960 \text{ N}.$$

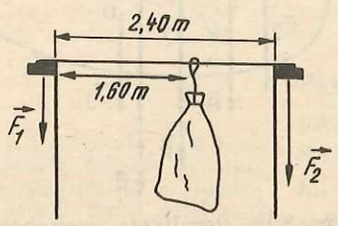


Fig. 8.14. La exemplul 1

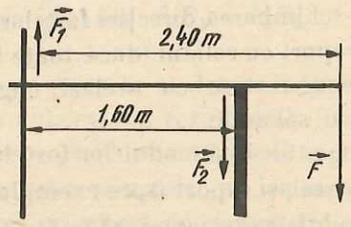


Fig. 8.15. La exemplul 2.

8.2.5. **Cuplul de forţe.** Cuplul de forţe este un sistem de două forţe paralele, de sensuri contrare, de acelaşi modul şi de suporturi diferite, aplicate aceluiaşi solid. Planul definit de cele două forţe se numeşte planul cuplului, iar distanţa dintre suporturile lor se numeşte *braţul cuplului* (fig. 8.16). Cu toate că rezultanta cuplului $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ (ceea ce face să nu existe mişcare de translaţie), totuşi cuplul are o acţiune bine determinată asupra corpului căruia i se aplică, rotindu-l în jurul unei axe perpendiculare pe planul cuplului.

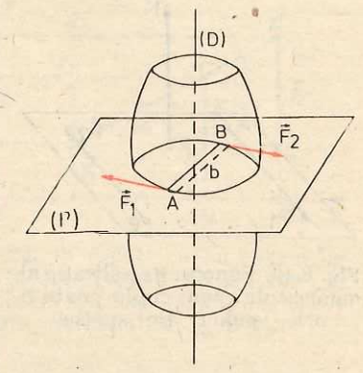


Fig. 8.16. Cuplul de forţe.

Exemple de cupluri de forţe: acţiunea mîinilor asupra unui volan de automobil sau asupra ghidonului unei biciclete, acţiunea tijei unei şurubelniţe asupra crestăturii unui şurub, acţiunea mîinii asupra unui tirbuşon (fig. 8.17).

8.2.6. **Momentul unui cuplu.** Momentul unui cuplu de forţe este acelaşi în raport cu orice punct din spaţiu, fiind o proprietate intrinsecă a cuplului (fig. 8.18).

Să considerăm un punct oarecare O din spaţiu. Momentul cuplului în raport cu acest punct este:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F},$$

deoarece $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$.

Dar $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_0$ deci

$$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{F}. \tag{8.9}$$

Momentul cuplului este perpendicular pe planul definit de forţele $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ şi are modulul

$$M = Fr_0 \sin \alpha = Fb, \tag{8.10}$$

unde $b = r_0 \sin \alpha$ este braţul cuplului.

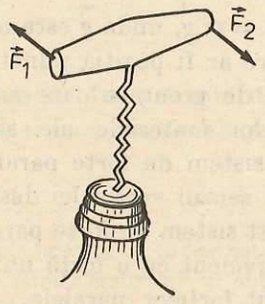


Fig. 8.17. Cuplul de forţe are ca efect producerea unei mişcări de rotaţie.

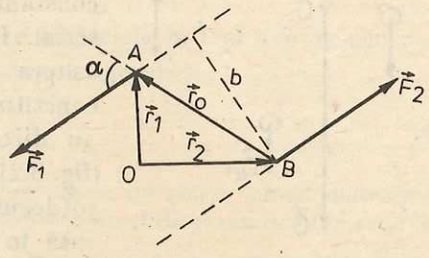


Fig. 8.18. Momentul unui cuplu.

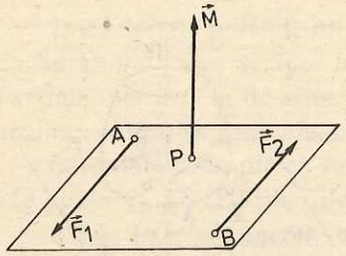


Fig. 8.19. Punctul de aplicație al momentului unui cuplu poate fi orice punct din spațiu.

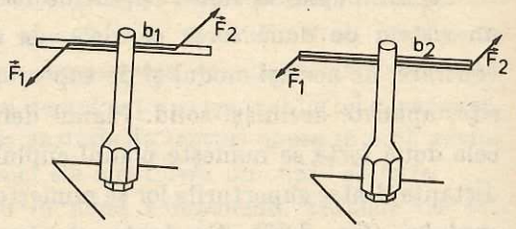


Fig. 8.20. Două cupluri sînt echivalente cînd produc același efect.

Sensul momentului cuplului coincide cu sensul de înaintare al unui șurub drept, a cărui axă coincide cu suportul momentului, pe care îl rotim în sensul în care cuplul tinde să rotească corpul.

Punctul de aplicație al momentului cuplului poate fi orice punct din spațiu (fig. 8.19) (în cazul corpurilor rigide).

Două sau mai multe cupluri se spune că sînt echivalente, dacă aplicate succesiv aceluiași corp, produc același efect (fig. 8.20). Cuplurile echivalente se pot înlocui unul cu altul. Toate cuplurile echivalente au același moment, deoarece efectul de rotație este caracterizat numai de către momentul cuplului. **În cazul corpurilor rigide un cuplu poate fi rotit, deplasat în propriul său plan sau într-un plan paralel, efectul său rămînînd același, deoarece momentul său nu se modifică.**

8.3. CENTRUL DE GREUTATE

8.3.1. **Centrul de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale.** Considerăm un sistem alcătuit din n puncte materiale A_1, A_2, ..., A_n, de mase respective m_1, m_2, ... m_n, care au pozițiile fixe unele față de altele deoarece sistemul este nedeformabil. Sistemul de puncte materiale este plasat în cîmpul gravitațional uniform. Fiecare punct al sistemului este supus acțiunii unei forțe de greutate $\vec{G}_i = m_i\vec{g}$, unde $\vec{g}$ este un vector constant oricare ar fi poziția punctului material. Forțele de greutate care acționează asupra punctelor materiale ale sistemului constituie un sistem de forțe paralele, care au direcția și sensul verticalei descendente (fig. 8.21). Acest sistem de forțe paralele este totdeauna echivalent cu o forță unică, aplicată în centrul forțelor paralele.

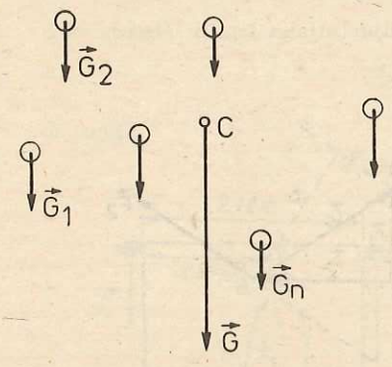


Fig. 8.21. Centrul de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale.

Centrul forțelor de greutate paralele se numește *centrul de greutate* al sistemului,

iar forța unică $\vec{G}$, echivalentă cu forțele sistemului, se numește *greutatea sistemului de puncte materiale.*

Modulul forței $\vec{G}$ este dat de relația:

$$G = m_1g + m_2g + \ldots + m_ng = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)g,$$

sau

$$G = Mg, \qquad (8.11)$$

unde $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, reprezintă masa sistemului de puncte materiale. Centrul de greutate se comportă ca un punct material de masă M, egală cu suma maselor m_i ale tuturor punctelor materiale ale sistemului.

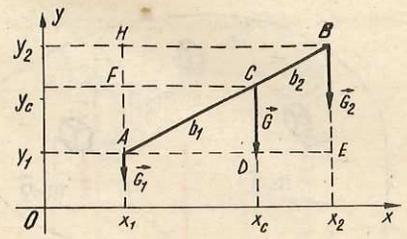


Fig. 8.22. În raport cu un sistem de referință fix, centrul de greutate al unui sistem de două puncte materiale are coordonatele x_c și y_c.

Vom determina poziția centrului de greutate al unui sistem de 2 puncte materiale în raport cu un sistem de coordonate.

Considerăm deci un sistem alcătuit din două puncte materiale de mase m_1 și m_2 și de coordonate x_1, y_1 și x_2, y_2, raportate la un sistem de axe perpendiculare xOy (fig. 8.22).

Forțele paralele $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$ și $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$ au drept rezultantă forța $\vec{G}$, cu punctul de aplicație în C, numit centru de greutate. Conform relației (8.7), avem

$$G_1b_1 = G_2b_2, \quad \text{sau} \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{G_2}{G_1}. \qquad (8.12)$$

Din asemănarea triunghiurilor AEB și ADC, precum și a triunghiurilor AHB și AFC (fig. 8.22), obținem:

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{b_1}{b_2} \text{ și } \frac{y_c - y_1}{y_2 - y_c} = \frac{b_1}{b_2}. \qquad (8.13)$$

Comparînd relațiile (8.12) și (8.13), obținem:

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{G_2}{G_1} \text{ și } \frac{y_c - y_1}{y_2 - y_c} = \frac{G_2}{G_1}.$$

Aceste relații ne permit să determinăm coordonatele centrului de greutate:

$$x_c = \frac{G_1x_1 + G_2x_2}{G_1 + G_2}; \quad y_c = \frac{G_1y_1 + G_2y_2}{G_1 + G_2}. \qquad (8.14)$$

Dacă raportăm sistemul de puncte materiale la trei axe de coordonate, obținem a treia coordonată a centrului de greutate:

$$z_c = \frac{G_1z_1 + G_2z_2}{G_1 + G_2}. \qquad (8.15)$$

Relațiile (8.14) și (8.15) se pot generaliza pentru un sistem format dintr-un număr oarecare de puncte materiale și obținem pentru centrul de greutate al acestui sistem, coordonatele:

$$x_c = \frac{G_1x_1 + \ldots + G_nx_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}, \quad y_c = \frac{G_1y_1 + \ldots + G_ny_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}, \quad z_c = \frac{G_1z_1 + \ldots + G_nz_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}. \qquad (8.16)$$

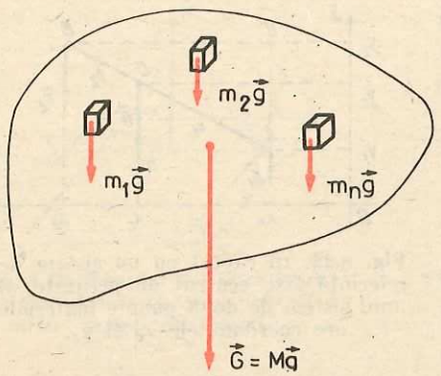


Fig. 8.23. Poziția centrului de greutate al unui solid este independentă de orientarea solidului în raport cu un sistem de referință fix.

Centrul de greutate are următoarele proprietăți:

a) poziția centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale față de punctele sistemului este independentă de poziția sistemului față de sistemul de referință;

b) dacă sistemul de puncte materiale are un centru de simetrie, acest punct coincide întotdeauna cu centrul de greutate al sistemului;

c) dacă sistemul de puncte materiale are o axă de simetrie, centrul de greutate al sistemului este situat pe această axă;

d) dacă sistemul de puncte materiale are un plan de simetrie, centrul de greutate este situat în acest plan.

8.3.2. **Centrul de greutate al unui solid rigid.** Orice corp solid poate fi descompus mintal într-un număr foarte mare de elemente de volum, foarte mici, care pot fi aproximate prin puncte materiale. Fiecare punct material de masă m_i este supus unei forțe de greutate $m_i\vec{g}$ (fig. 8.23). Totalitatea forțelor de greutate care se exercită asupra elementelor de volum de masă m_i, constituie un sistem de forțe paralele. Rezultanta $\vec{G}$ a sistemului de forțe paralele este greutatea corpului și are punctul de aplicație în centrul forțelor paralele, care este centrul de greutate al corpului.

Centrul de greutate este un punct fix al corpului ale cărui proprietăți sînt identice cu acelea ale centrului de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale. În plus trebuie să menționăm că poziția centrului de greutate al **unui solid omogen este independentă de masa cuprinsă în același contur. Spre exemplu, centrul de greutate al unei sticle goale are aceeași poziție ca și centrul de greutate al aceleiași sticle umplută complet cu un lichid. Deci toate centrele de greutate ocupă poziții identice în raport cu contururi identice.**

Centrul de greutate al unui corp omogen și cu formă geometrică regulată depinde de elementele geometrice ale corpului, nu și de natura materialului din care este alcătuit. Dacă aceste corpuri au un plan, o axă sau un centru de simetrie, atunci centrul de greutate se găsește în planul, pe axa sau în centrul de simetrie respectiv. Spre exemplu, centrul unei bare omogene se află la mijlocul său; al unui disc circular omogen se află în centrul său; al unei sfere omogene se află în centrul sferei; al unui cilindru se află la jumătatea înălțimii cilindrului etc. Centrul de greutate al unei plăci triunghiulare se află la intersecția medianelor triunghiului.

Experimental centrul de greutate al unui corp se determină în felul următor. Se suspendă corpul într-un punct al său A, de care se leagă un fir cu plumb. Direcția firului se marchează pe corp. Apoi se suspendă corpul într-un alt punct al său B și se marchează, din nou pe corp, direcția firului cu plumb Intersecția celor două linii marcate pe corp arată poziția centrului de greutate C (fig. 8.24). Se poate verifica experimental că centrul de greutate al unui corp este un punct unic.

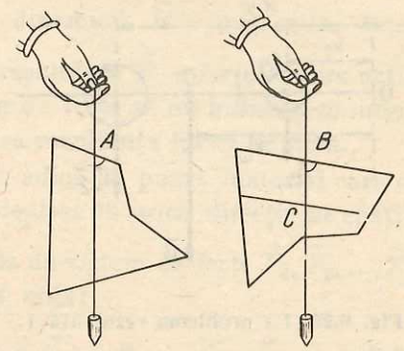


Fig. 8.24. Determinarea experimentală a centrului de greutate al unui corp.

După cum se poate arăta, într-un cîmp gravitațional omogen, centrul de greutate coincide cu centrul de masă. Totuși noțiunea de centru de masă este mai generală decît aceea de centru de greutate, deoarece centrul de masă al unui sistem fizic se poate determina întotdeauna, independent de forțele gravitaționale, ceea ce nu este adevărat pentru centrul de greutate. Spre exemplu, un experimentator din spațiul cosmic, aflat într-un satelit, nu va putea să determine centrul de greutate al unui obiect deoarece forța gravitațională nu are nici un efect în locul în care se face experimentul. În schimb, experimentatorul va putea determina centrul de masă al obiectului.

EXEMPLE

1. Pe o tijă rigidă de masă neglijabilă sînt introduse două sfere O_1 și O_2 de mase respective m_1 și m_2. Centrele sferelor se află la distanțele x_1 respectiv x_2 de extremitatea O a tijei (fig. 8.25). Să se determine poziția centrului de greutate al sistemului alcătuit din cele două sfere.

Rezolvare. Greutatea $\vec{G}$ a sistemului alcătuit din cele două sfere este aplicată în punctul C, centrul de greutate al sistemului.

Momentul forței rezultante $\vec{G}$, în raport cu punctul O, este egal cu suma momentelor forțelor componente în raport cu același punct, deci:

$$Gx_C = G_1x_1 + G_2x_2,$$

de unde

$$x_C = \frac{G_1x_1 + G_2x_2}{G_1 + G_2},$$

deoarece $G = G_1 + G_2$.

2. Să se determine poziția centrului de greutate C al unui disc omogen cu grosimea uniformă și de diametru $D_1 = 40$ cm, din care s-a tăiat o bucată circulară cu diametrul $D_2 = 10$ cm. Centrul O_2 al orificiului circular se află la 10 cm de centrul O_1 al discului dat (fig. 8.26).

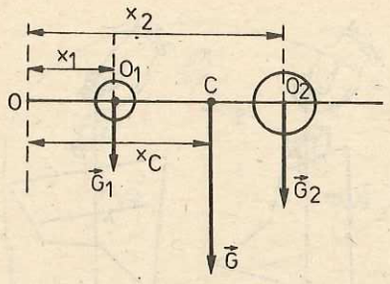


Fig. 8.25. La problema rezolvată 1.

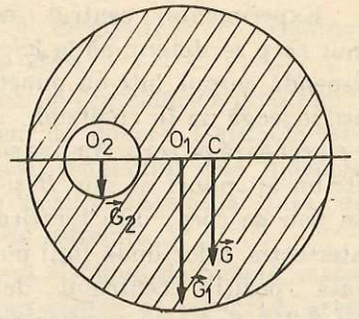


Fig. 8.26. La problema rezolvată 2.

Rezolvare. Calculăm raportul dintre greutatea $G_1 = \pi R_1^2 h\rho g$ a discului întreg și greutatea $G_2 = \pi R_2^2 h\rho g$ a părții scoase din disc:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{16}{1},$$

unde R_1 este raza discului și R_2 raza părții decupate.
Greutatea discului incomplet se obține din relația de mai sus făcînd o proporție derivată:

$$\frac{G_1 - G_2}{G_2} = \frac{15}{1}$$

deci: $G = G_1 - G_2 = 15\ G_2$.

Presupunînd că discul este întreg, greutatea lui, $\vec{G}_1$, aplicată în O_1, este rezultanta forțelor paralele $\vec{G}_2$ și $\vec{G}$.

Momentul forței rezultante $\vec{G}_1$, în raport cu O_1 este egal cu suma momentelor forțelor componente $\vec{G}_2$ și $\vec{G}$ în raport cu același punct.
Deci

$$G_2 \cdot O_1O_2 - G \cdot O_1C = 0,$$

de unde

$$O_1C = \frac{G_2 \cdot O_1O_2}{G} = \frac{G_2 \cdot O_1O_2}{15\,G_2} = \frac{10}{15} = 0{,}67 \text{ cm}.$$

8.4. ECHILIBRUL MECANIC. CONDIȚII DE ECHILIBRU

8.4.1. **Echilibrul punctului material liber. Echilibrul de translație.** Punctul material, fiind considerat un corp cu dimensiuni neglijabile, acesta nu poate efectua mișcări de rotație în jurul unei axe trecînd prin corp. Sub acțiunea unui sistem de forțe, punctul material poate efectua mișcări de translație. Echilibrul sistemului de forțe aplicate punctului material se numește *echilibru de translație.*

Se spune că un sistem de forțe este în echilibru sau că are efect nul atunci cînd nu influențează mișcarea sau starea de repaus a corpului pe care îl acționează.

Conform principiului fundamental al dinamicii, $\vec{R} = m\vec{a}$, cauza determinantă a variației vitezei unui corp este rezultanta $\vec{R}$, a forțelor care acționează asupra corpului. Pentru ca un sistem de forțe să nu influențeze mișcarea corpului pe care îl acționează, trebuie ca rezultanta lui să fie nulă.

Să considerăm un punct material liber, adică un punct material care nu este legat de alte corpuri și care se poate deplasa în orice direcție în spațiu.

Dacă punctul material liber este acționat de un sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, în așa fel dispuse încît rezultanta lor să fie nulă:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0, \tag{8.17}$$

atunci punctul material rămîne în repaus sau se mișcă rectiliniu și uniform față de un sistem de referință inerțial. Spunem că punctul material este în echilibru. Echilibrul este *static* cînd punctul material rămîne în repaus și echilibrul este *dinamic* cînd se mișcă rectiliniu și uniform în raport cu sistemul de referință dat. Alegînd convenabil sistemul de referință, echilibrul dinamic poate fi privit ca echilibru static. În continuare ne vom referi numai la echilibrul static. Relația (8.17) reprezintă condiția de echilibru pentru punctul material liber. Deci:

condiția necesară și suficientă pentru echilibrul unui sistem de forțe aplicate unui punct material liber este ca rezultanta forțelor să fie nulă.

Dacă proiectăm ecuația vectorială (8.17) pe două axe de coordonate perpendiculare Ox și Oy, condiția de echilibru (8.17) este înlocuită prin următoarele condiții de echilibru:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \tag{8.18}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0. \tag{8.19}$$

Condiția necesară și suficientă pentru echilibrul sistemului de forțe care acționează asupra punctului material liber, este ca suma componentelor forțelor pe două axe perpendiculae Ox și Oy să fie zero.

8.4.2. **Echilibrul punctului material liber supus acțiunii a două forțe.**

EXPERIMENT

Vom folosi dispozitivul experimental reprezentat în figura 8.27, realizat cu componente ale trusei de fizică pentru liceu. Acest dispozitiv este schematizat în mod simplificat în figura 8.28.

Corpul studiat este un inel foarte ușor, asimilat cu un punct material. Greutatea inelului se neglijează în raport cu forțele care acționează asupra lui. De inel se leagă două fire, care trec peste doi scripeți. La extremitățile acestor fire se leagă niște cîrlige suport pentru discuri crestate. Pe ambele

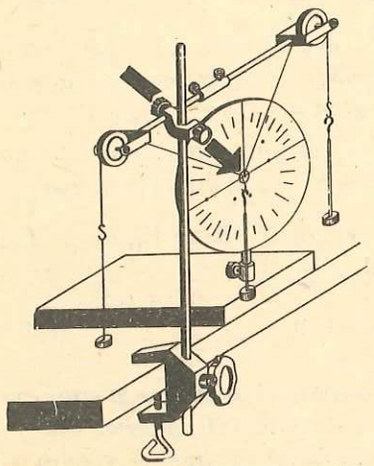


Fig. 8.27. Dispozitiv pentru studiul echilibrului forţelor.

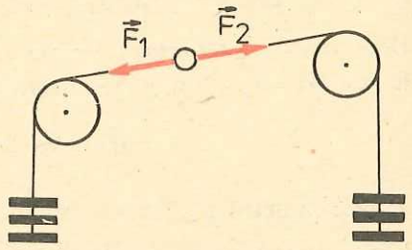


Fig. 8.28. Echilibrul unui punct material supus acţiunii a două forţe.

cîrlige suport se pun în număr egal discuri. Se constată că firele legate de inel se întind în linie dreaptă, iar inelul rămîne în repaus.

Interpretăm acest experiment simplu astfel. Asupra inelului acţionează două forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ care au acelaşi suport, sensurile opuse şi modulele egale. Rezultanta $\vec{R}$ a forţelor este egală cu zero:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Cele două forţe se echilibrează.

Un punct material liber supus acţiunii a două forţe este în echilibru dacă cele două forţe au acelaşi suport, acelaşi modul şi sensurile opuse.

8.4.3. Echilibrul punctului material liber supus acţiunii a trei forţe.

EXPERIMENT

Se foloseşte dispozitivul din figura 8.27 care este reprezentat simplificat în figura 8.29. Corpul studiat este inelul din experimentul precedent. De acest inel se leagă trei fire, dintre care două se trec peste cei doi scripeţi ai dispozitivului. De unul dintre firele trecute peste scripeţi se suspendă, spre exemplu, patru discuri crestate, iar de celălalt trei discuri crestate. Lăsat liber inelul nu mai rămîne în echilibru şi, pentru a-l echilibra, se suspendă de al treilea fir un număr de discuri crestate, spre exemplu cinci.

Asupra punctului material acţionează trei forţe concurente: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$.

Vom înlocui forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ prin rezultanta lor $\vec{R}_1$. Punctul material se află în echilibru sub acţiunea forţelor $\vec{F}_3$ şi $\vec{R}_1$. Deci $\vec{R}_1$ trebuie să aibă acelaşi suport şi acelaşi modul ca $\vec{F}_3$ şi sensul opus acesteia:

$$\vec{R}_1 = -\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

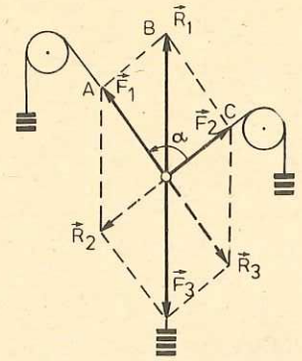


Fig. 8.29. Un punct material este în echilibru sub acţiunea a trei forţe coplanare concurente cînd rezultanta lor este nulă.

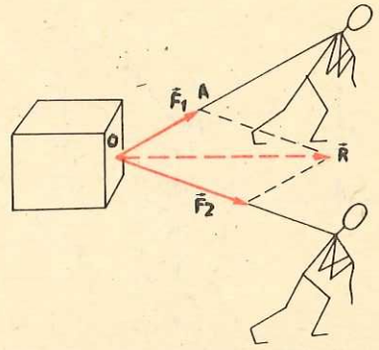


Fig. 8.30. Sistemul de forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ concurente în O este echivalent cu o forţă unică $\vec{R}$, numită rezultanta sistemului de forţe.

Deci,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.$$

Prin urmare

condiţia necesară şi suficientă ca punctul material liber supus acţiunii a trei forţe să fie în echilibru este ca rezultanta lor să fie zero.

Experimentul descris mai sus permite să se verifice faptul că: rezultanta a două forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ concurente într-un punct O este definită în direcţie, sens şi modul prin diagonala care pleacă din O, a paralelogramului care are ca laturi cele două forţe (fig. 8.29 şi 8.30).

Pentru verificarea experimentală de care am vorbit mai sus, măsurăm unghiul dintre forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ cu ajutorul unui raportor în formă de disc, cu care este prevăzut dispozitivul, şi apoi reprezentăm la scară forţele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{R}_1$ pe o foaie de hîrtie milimetrică. Din reprezentarea grafică constatăm că forţa $\vec{R}_1$ este orientată după diagonala paralelogramului construit pe forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ ca laturi şi are modulul egal cu lungimea diagonalei.

Acelaşi experiment permite să se verifice că fiecare dintre cele trei forţe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, şi $\vec{F}_3$ este direct opusă rezultantei celorlalte două (fig. 8.29).

EXEMPLU

De mijlocul unui fir O este legat un inel uşor, asimilat cu un punct material, a cărui greutate este neglijabilă în raport cu forţele care acţionează asupra lui. Capetele firului, care susţin două corpuri cu greutăţile $G_1 = 6$ N şi $G_2 = 8$ N, sînt trecute

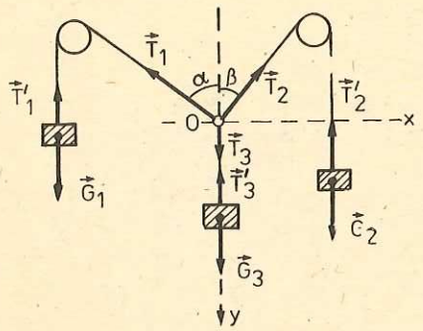


Fig. 8.31. La problema rezolvată.

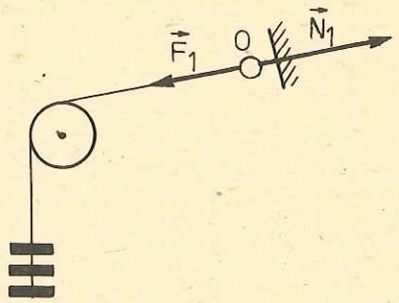


Fig. 8.32. Punctul material este în echilibru sub acțiunea forței $\vec{F}_1$ și a forței de legătură $\vec{N}_1$.

peste doi scripeți mici. De inel se leagă un al doilea fir, care susține un corp de greutate $G_3 = 10$ N (fig. 8.31). Să se determine unghiurile α și β pentru poziția de echilibru a punctului material O.

Rezolvare. Punctul material O este liber. Poziția sa în spațiu fiind determinată numai de forțele care acționează asupra lui. Asupra punctului material acționează forțele $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ și $\vec{T}_3$. Punctul material fiind în echilibru, rezultanta forțelor care acționează asupra lui este zero.

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0. \qquad (8.20)$$

Proiectăm ecuația vectorială (8.20) pe două axe de coordonate Ox și Oy. Direcția axei Oy coincide cu direcția forței $\vec{T}_3$, iar axa Ox este perpendiculară pe Oy în O. Efectuînd proiecțiile, și avînd în vedere că $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$ și $T_3 = G_3$, obținem: $-G_1 \sin \alpha + G_2 \sin \beta = 0$; $G_3 - G_1 \cos \alpha - G_2 \cos \beta = 0$, sau

$$G_1 \sin \alpha = G_2 \sin \beta; \; G_3 - G_1 \cos \alpha = G_2 \cos \beta. \qquad (8.21)$$

Ridicînd la pătrat relațiile (8.21) și apoi adunîndu-le, obținem:

$$\cos \alpha = \frac{G_3^2 + G_1^2 - G_2^2}{2G_1G_3} = 0{,}6; \; \alpha \approx 53°.$$

În mod asemănător se obține și

$$\cos \beta = \frac{G_3^2 + G_2^2 - G_1^2}{2G_2G_3} = 0{,}8; \; \beta \approx 37°.$$

8.4.4. **Echilibrul punctului material supus la legături.** Suprimăm unul dintre firele legate de inelul folosit în experimentul descris în § 8.4.2. și apoi prindem inelul de un cîrlig (fig. 8.32). Asupra inelului, care este în echilibru acționează forța $\vec{F}_1$. Însă această forță singură nu poate să echilibreze inelul. Trebuie să admitem existența unei a doua forțe $\vec{N}_1$. Această forță care se exercită din partea cîrligului, adică din partea legăturii, este o forță de legătură sau o forță de reacțiune sau simplu reacțiune. Forța de legătură $\vec{N}_1$ are același suport, același modul ca forța $\vec{F}_1$ și sensul opus acesteia. Deci cele două forțe se echilibrează, rezultanta lor fiind egală cu zero.

Se numește legătură, orice cauză care limitează mișcarea unui punct material sau a unui corp oarecare în spațiu. Legăturile obligă punctul material să rămînă tot timpul pe o anumită suprafață sau pe o anumită curbă sau să nu părăsească un anumit loc din spațiu.

Cîteva legături simple ale punctului material le cunoașteți din capitolele precedente. Spre exemplu: legăturile realizate prin fire care dau naștere unor reacțiuni numite tensiuni în fire, sau legăturile realizate prin anumite suprafețe plane sau curbe pe care sînt așezate puncte materiale. Acestea dau naștere unor reacțiuni $\vec{N}$ orientate de-a lungul normalei comune la suprafețele corpurilor în contact (fig. 8.33).

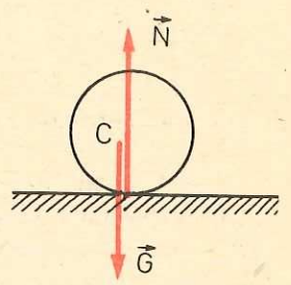


Fig. 8.33. Greutatea $\vec{G}$ a punctului material este echilibrată de reacțiunea $\vec{N}$ a suprafeței pe care este așezat acesta.

Reacțiunile (forțele de legătură) pot înlocui legăturile geometrice. Urmează că atunci cînd eliberăm un punct material de o legătură, să aplicăm asupra acestuia, cîte o forță de legătură. Procedînd astfel, înlocuim legăturile cu un sistem de forțe de legătură.

Condiția necesară și suficientă ca un punct material supus la legături să fie în echilibru este ca rezultanta forțelor efectiv aplicate asupra punctului material și a forțelor de legătură să fie egală cu zero.

EXEMPLE

Pe un plan orizontal se află un punct material de greutate $\vec{G}$, asupra căruia acționează o forță $\vec{F}$, formînd cu orizontala unghiul α (fig. 8.34). Să se determine forța maximă pentru care punctul material rămîne încă în echilibru. Coeficientul de frecare dintre punctul material și plan este μ.

Rezolvare. Această problemă se referă la punctul material supus la legături. Se înlocuiesc legăturile geometrice prin forțele de legătură și se scrie condiția de echilibru:

$$\vec{G} + \vec{F}_f + \vec{F} + \vec{N} = 0, \qquad (8.22)$$

unde $\vec{G}$ este greutatea punctului material, $\vec{F}_f$ forța de frecare, $\vec{F}$ forța de tracțiune, $\vec{N}$ reacțiunea normală a planului.

Proiectînd ecuația (8.22) pe două axe de coordonate perpendiculare Ox și Oy, care au direcțiile orizontală și verticală și sensul indicat pe figură, obținem:

$$F \cos \alpha - \mu N = 0, \qquad (8.23)$$

$$N + F \sin \alpha - G = 0, \qquad (8.24)$$

unde μN este modulul forței de frecare la limita lunecării. Din relația (8.24) scoatem valoarea lui N, o introducem în (8.23) și după efectuarea calculelor obținem:

$$F \cos \alpha + \mu F \sin \alpha - \mu G = 0.$$

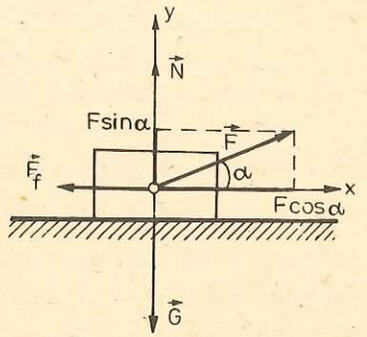


Fig. 8.34. La problema rezolvată.

Din relaţia de mai sus obţinem forţa maximă pentru care punctul material rămîne încă în echilibru:

$$F_{max} = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Pentru forţe mai mici decît F_{max} corpul va fi în echilibru.

8.4.5. **Echilibrul de translaţie şi de rotaţie al unui solid rigid.** Un solid rigid, sub acţiunea unui sistem de forţe, poate efectua o mişcare de translaţie sau o mişcare de rotaţie. Deci, în acest caz sînt necesare două condiţii de echilibru pe care le vom studia în cele ce urmează.

a. Un corp solid este în echilibru de translaţie, în raport cu un sistem de referinţă inerţial, dacă este în repaus (echilibru static) sau cînd se află în mişcare rectilinie şi uniformă (echilibru dinamic). Putem transforma orice caz de echilibru dinamic în echilibru static, plasînd solidul într-un sistem de referinţă convenabil ales.

Condiţiile de echilibru de translaţie pentru solidul rigid sînt aceleaşi ca şi pentru punctul material.

Solidul rigid este în echilibru de translaţie cînd rezultanta sistemului de forţe care acţionează asupra lui este zero.

Condiţie exprimată prin relaţia următoare:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0. \qquad (8.25)$$

Relaţia (8.25) exprimă prima condiţie de echilibru.

Proiectînd ecuaţia vectorială (8.25) pe două axe perpendiculare Ox şi Oy, obţinem:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \qquad (8.26)$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0. \qquad (8.27)$$

Deci, *pentru ca un sistem de forţe aplicate unui solid rigid să fie în echilibru de translaţie (într-un plan), este necesar şi suficient ca suma componentelor forţelor pe două axe perpendiculare Ox şi Oy să fie nule.*

b. Efectul de rotaţie produs de o forţă asupra unui solid este măsurat prin momentul forţei în raport cu un punct sau cu o axă.

Solidul rigid este în echilibru de rotaţie cînd se află în repaus sau cînd se roteşte uniform în jurul unei axe. Pentru a fi îndeplinite aceste condiţii este necesar şi suficient ca momentul rezultant al forţelor aplicate solidului să fie nul.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = 0. \qquad (8.28)$$

Relaţia (8.28) exprimă a doua condiţie de echilibru, numită şi condiţia de echilibru de rotaţie.

Observaţii. 1. Echilibrul de translaţie este independent de poziţia punctelor de aplicaţie ale forţelor care îl acţionează. Dacă solidul reprezentat în

figura 8.35, *a*, este în echilibru sub acţiunea forţelor cu punctele de aplicaţie în A, B, C, el va rămîne mai departe în echilibru şi cînd punctele de aplicaţie ale forţelor sînt în A_1, B_1, C_1 (fig. 8.35, *b*). Poziţia punctului de aplicaţie al forţelor influenţează numai echilibrul de rotaţie.

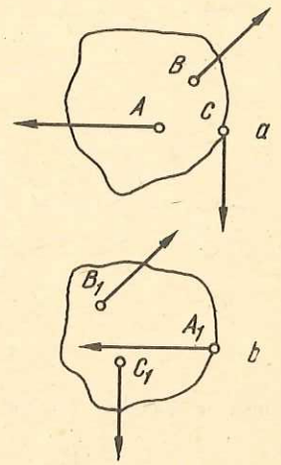


Fig. 8.35. Echilibrul de translaţie este independent de poziţia punctelor de aplicaţie ale forţelor.

2. Condiţiile de echilibru depind de natura sistemului de forţe care acţionează asupra solidului rigid. Distingem următoarele cazuri particulare:

1) Dacă solidul rigid este supus acţiunii a două forţe, el este în echilibru cînd cele două forţe au acelaşi modul, acelaşi suport şi sensurile opuse.

2) Dacă solidul este supus acţiunii a trei forţe, aplicate în trei puncte necoliniare, el este în echilibru cînd:

a) suporturile forţelor sînt cuprinse în planul determinat de punctele lor de aplicaţie;

b) suporturile forţelor sînt concurente;

c) rezultanta a două dintre cele trei forţe are acelaşi suport şi acelaşi modul ca forţa a treia, sensul ei fiind opus sensului celei de a treia forţe.

3) Dacă solidul este supus acţiunii unui sistem de forţe situate în acelaşi plan, el este în echilibru cînd rezultanta sistemului de forţe este egală cu zero:

$$\vec{R} = \sum_i^n \vec{F}_i = 0.$$

Observaţie. Dacă rezultanta forţelor este zero (adică este îndeplinită condiţia de echilibru la translaţie) atunci momentul rezultant al forţelor în raport cu orice punct din spaţiu nu depinde de acest punct (adică condiţia de anulare a momentului se poate pune faţă de orice pol).

EXEMPLE

1. Echilibrul unui solid sub acţiunea unui sistem de forţe paralele.

O bară AB, de greutate neglijabilă şi de lungime l, este aşezată pe un suport într-un punct O aflat la distanţa $b_1 = \frac{2}{3} l$ de punctul A (fig. 8.36, *a*). În ce raport trebuie să se afle forţele, care trebuie aplicate la extremităţile barei, pentru ca aceasta să fie în echilibru?

Rezolvare. Aplicăm condiţia de echilibru (8.28) sistemului de forţe care acţionează asupra barei (fig. 8.36, *b*):

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_3) = 0. \qquad (8.29)$$

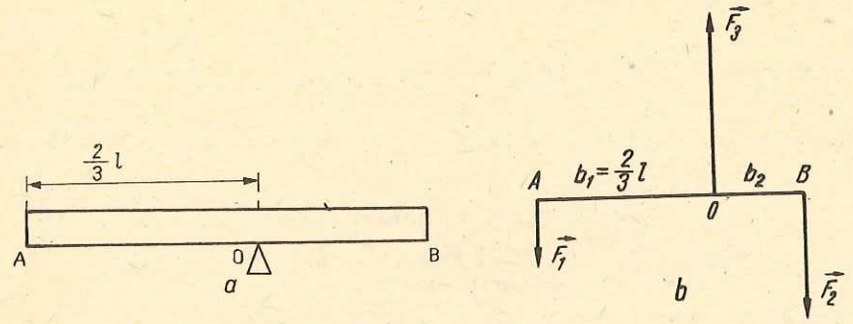


Fig. 8.36. La exemplul 1.

Momentele forţelor le calculăm în raport cu punctul O:

$$M_0(\vec{F}_1) = -b_1F_1 = -\frac{2}{3}\,l\,F_1;\ M_0(\vec{F}_2) = b_2F_2 = \frac{1}{3}\,lF_2.$$

Momentul forţei $\vec{F}_3$ în raport cu O este zero.
Înlocuind valorile momentelor în relaţia (8.29), obţinem:

$$b_2F_2 - b_1F_1 = 0,\ \text{sau}\ \frac{1}{3}\,lF_2 - \frac{2}{3}\,lF_1 = 0,$$

de unde:

$$F_2 = 2F_1. \tag{8.30}$$

Bara este în echilibru pentru toate forţele care satisfac relaţia (8.30).
Cum bara este şi în echilibru de translaţie, rezultanta forţelor care acţionează asupra barei este zero, deci:

$$F_3 - F_2 - F_1 = 0,\ \text{sau}\ F_3 = F_1 + F_2. \tag{8.31}$$

Cînd solidul este în echilibru de translaţie, condiţia $\Sigma\vec{M}(\vec{F}_i) = 0$ rămîne valabilă, oricare ar fi punctul sau axa în raport cu care se calculează momentele. Putem verifica acest lucru în cazul exemplului dat mai sus. Calculăm momentele în raport cu punctul A:

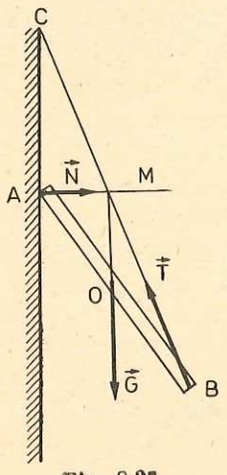


Fig. 8.37.
La exemplul 2.

$$F_1 \cdot 0 - F_3 \cdot \frac{2}{3}\,l + F_2 \cdot l = 0.$$

Avînd în vedere relaţia (8.31), obţinem:

$$F_2 = 2F_1.$$

Calculaţi momentele forţelor în raport cu un punct C aflat la distanţa $\frac{1}{4}\,l$ de A.

2. Echilibrul unui solid sub acţiunea unui sistem de forţe neparalele.

O bară omogenă de masă m şi lungime l se reazemă cu capătul ei superior A de un perete neted. De capătul barei B este prins un fir inextensibil BC, fixat de perete în punctul C. Lungimea firului este $l\sqrt{3}$. Să se determine poziţia de echilibru a barei pentru care reacţiunea $\vec{N}$ este perpendiculară pe perete în A (fig. 8.37).

Rezolvare. Înlocuim legăturile la care este supusă bara prin forţele de legătură $\vec{N}$ şi $\vec{T}$. Asupra barei acţionează sistemul de forţe $\vec{N}$, $\vec{T}$ şi $\vec{G}$. Bara fiind în echilibru, suporturile celor trei forţe se intersectează într-un punct M (fig. 8.37).

Reacţiunea $\vec{N}$ este perpendiculară în A, numai pentru una dintre poziţiile de echilibru ale barei, caracterizată prin distanţa $d = AC$, pe care trebuie să o determinăm. În triunghiul CAB, dreapta OM este paralelă cu latura AC şi intersectează laturile AB şi CB la jumătate. Deci $MC = (\sqrt{3}/2)l$.
Din triunghiurile dreptunghice CAM şi AMO, obţinem:

$$AM^2 = CM^2 - AC^2 = \frac{3}{4}\,l^2 - d^2,$$

şi

$$AM^2 = AO^2 - OM^2 = \frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4}.$$

Din relaţiile de mai sus obţinem:

$$\frac{3}{4}\,l^2 - d^2 = \frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4},$$

sau

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}}\,l.$$

Poziţia de echilibru a sistemului dat este independentă de greutatea barei.

8.5. ECHILIBRUL ÎN CÎMP GRAVITAŢIONAL. ECHILIBRUL ŞI ENERGIA POTENŢIALĂ

8.5.1. **Echilibrul punctului material.** Vom studia echilibrul unui punct material în cîmpul gravitaţional uniform, unde acesta este supus acţiunii forţelor de greutate şi acţiunii forţelor de legătură.

Spunem că un punct material este în echilibru static dacă este imobil în raport cu un sistem de referinţă inerţial. Condiţia necesară ca punctul material să fie în echilibru, în raport cu un sistem de referinţă inerţial, este ca suma vectorială a tuturor forţelor care acţionează asupra lui să fie nulă. Aceasta este condiţia necesară ca punctul material să fie în echilibru, dar este ea şi suficientă pentru ca echilibrul să fie stabil?

Să considerăm o suprafaţă al cărei profil este reprezentat în figura 8.38. Vom aşeza în diferite puncte ale acestei suprafeţe o bilă de dimensiuni reduse, asimilabilă cu un punct material. Constatăm că bila este în echilibru în punctele A şi B de pe porţiunea curbă a suprafeţei, precum şi în toate punctele de pe porţiunea plană orizontală MP a suprafeţei, deoarece în toate aceste puncte rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului material este egală cu zero:

$$\vec{R} = \vec{G} + \vec{N} = 0,$$

unde $\vec{G}$ este greutatea punctului material şi $\vec{N}$ reacţiunea suprafeţei de sprijin.

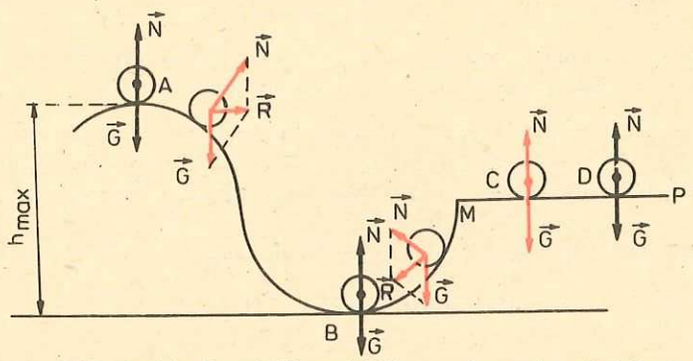


Fig. 8.38. Poziția de echilibru stabil a unui punct material sub acțiunea forțelor de greutate corespunde minimului de energie potențială.

Dacă îndepărtăm foarte puțin bila din poziția de echilibru static, pot interveni trei situații:

a) îndepărtînd-o din punctul A, asupra bilei acționează o forță rezultantă care o îndepărtează și mai mult de poziția inițială. Se spune că echilibrul este *instabil*;

b) îndepărtînd-o din punctul B, bila este acționată de o forță rezultantă care o readuce la poziția inițială — se spune că echilibrul este *stabil*;

c) îndepărtată din punctul C, bila rămîne în echilibru în orice punct al suprafeței plane orizontale — se spune că echilibrul este *indiferent*.

Prin urmare, forța rezultantă egală cu zero este o condiție necesară, dar nu suficientă pentru echilibrul stabil al punctului material într-un cîmp de forțe conservativ.

Echilibrul punctului material (al bilei) poate fi considerat și din punctul de vedere al energiei potențiale a sistemului alcătuit din punctul material și Pămînt. Energia potențială a acestui sistem se exprimă prin relația $E_p = mgh$, unde h reprezintă diferența de nivel dintre poziția punctului material și nivelul corespunzător energiei potențiale nule. În cazul descris mai sus și reprezentat în figura 8.38, vom lua planul orizontal care trece prin punctul B, ca nivel de referință pentru energia potențială, a cărei valoare la acest nivel o considerăm nulă, $E_{pB} = E_{po} = 0$. Punctul A corespunde maximului de energie potențială, iar punctul B corespunde minimului de energie potențială. Pe planul orizontal care trece prin punctele C și D energia potențială este constantă.

Deci, poziția de echilibru stabil a unui punct material sub acțiunea forțelor de greutate este aceea care corespunde minimului de energie potențială, în comparație cu valorile din pozițiile vecine. Această proprietate este valabilă pentru orice punct material supus acțiunii unor forțe conservative.

În poziția de echilibru instabil, energia potențială are o valoare maximă în comparație cu valorile din punctele vecine. Iar în cazul cînd energia potențială a punctului material este constantă, punctul material se află în echilibru indiferent.

8.5.2. **Echilibrul solidului rigid suspendat.** Considerațiile făcute asupra echilibrului punctului material în cîmpul gravitațional se pot extinde foarte ușor la echilibrul solidului rigid. Părțile componente ale solidului sînt acționate de forțele gravitaționale a căror rezultantă este aplicată în centrul de greutate al corpului. Putem să înlocuim solidul printr-un punct material plasat în centrul său de greutate în care presupunem concentrată întreaga masă a corpului.

Cunoașterea poziției centrului de greutate al unui solid este de mare importanță pentru diferitele aspecte ale echilibrului acestuia.

Suspendăm o riglă omogenă cu una dintre extremitățile sale de un cui (fig. 8.39, *a*). Constatăm că centrul său de greutate se află sub punctul de suspensie și pe aceeași verticală cu acesta. Forțele care acționează asupra riglei, greutatea $\vec{G}$ și reacțiunea $\vec{N}$ a suportului se echilibrează. Se îndepărtează rigla din această poziție. Centrul său de greutate urcă, iar energia potențială crește. Lăsată liber, rigla este readusă în poziția inițială de către cuplul alcătuit din forțele $\vec{G}$ și $\vec{N}$. În acest caz, rigla se află în echilibru stabil. Poziției de echilibru stabil îi corespunde energia potențială minimă.

Se rotește rigla cu 180°, așa cum indică figura 8.39, *b*. Centrul de greutate a urcat deasupra punctului de sprijin, iar energia potențială a sistemului a crescut la valoarea maximă. În acest caz avem de a face cu un echilibru instabil. Îndepărtînd foarte puțin rigla din această poziție, aceasta, sub acțiunea cuplului de forțe $\vec{G}$ și $\vec{N}$, tinde să ocupe poziția corespunzătoare energiei potențiale minime; deci, poziția de echilibru stabil.

Dacă se suspendă rigla în centrul său de greutate, oricare ar fi poziția în care o așezăm, ea rămîne în echilibru. În acest caz rigla este în echilibru indiferent.

În concluzie, modificînd foarte puțin poziția de echilibru static a unui solid suspendat, se pot ivi trei cazuri:

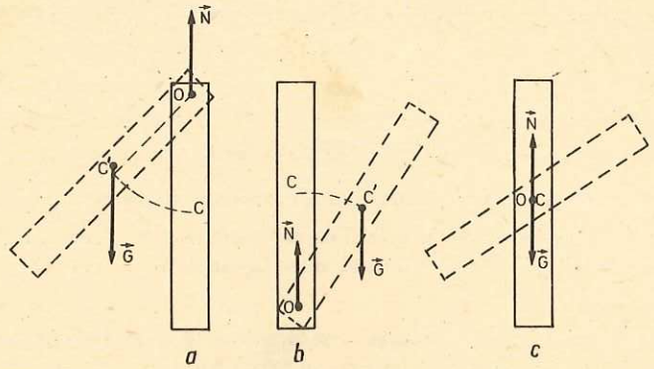


Fig. 8.39. Solidul (rigla) este în echilibru: stabil în poziția *a*; instabil în poziția *b*; indiferent în poziția *c*

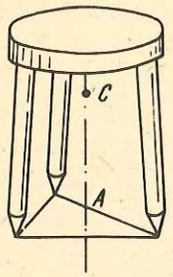


Fig. 8.40. Baza de sprijin a trepiedului este un triunghi.

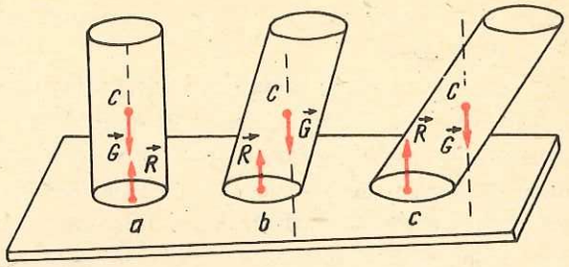


Fig. 8.41. Un corp aşezat pe o suprafaţă plană este în echilibru cînd verticala coborîtă din centrul său de greutate cade în interiorul suprafeţei de susţinere.

a) solidul revine la poziţia iniţială — se spune că echilibrul este stabil;

b) solidul se îndepărtează şi mai mult de poziţia de echilibru — se spune că echilibrul este instabil;

c) solidul rămîne în repaus în orice poziţie — se spune că echilibrul esté indiferent.

8.5.3. **Echilibrul solidului care are o bază de sprijin.** Clădirile, vehiculele, obiectele din gospodării aşezate pe suprafeţe plane sînt în stare de echilibru, deoarece ele au o bază de susţinere. Un scaun sau o masă se sprijină pe podea în patru puncte, un taburet în trei puncte. Unind punctele corpului aflate în contact cu suprafaţa plană şi anume pe cele mai îndepărtate, obţinem un poligon convex, a cărui suprafaţă se numeşte *bază de susţinere*. Figura 8.40 arată că baza de susţinere a unui taburet este un triunghi.

Un corp solid aşezat pe o suprafaţă plană se află în echilibru, atunci cînd verticala coborîtă din centrul său de greutate cade în interiorul bazei de susţinere. De exemplu cilindrul din figura 8.41, *a* este în echilibru deoarece greutatea şi reacţiunea se echilibrează reciproc. Cilindrul din figura 8.41, *c*, pentru care verticala coborîtă din centrul de greutate nu cade în interiorul bazei de sprijin, nu este în echilibru, deoarece greutatea şi reacţiunea formează un cuplu care tinde să-l răstoarne. Cilindrul din figura 8.41, *b* este la limita echilibrului.

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. In ce caz,două sau mai multe sisteme de forţe,sînt echivalente?

2. Se descompune o forţă pe două direcţii oarecare coplanare cu forţa. Este posibil ca una dintre componentele forţei să fie mai mare decît forţa?

R: da.

3. Dacă rezultanta unui sistem de forţe concurente este zero, demonstraţi că şi momentul rezultant al acestor forţe în raport cu un punct oarecare este zero.

4. Demonstraţi că un cuplu nu poate fi echilibrat decît de un alt cuplu.

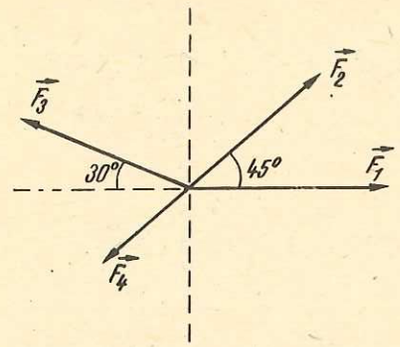


Fig. 8.42. La problema 8.

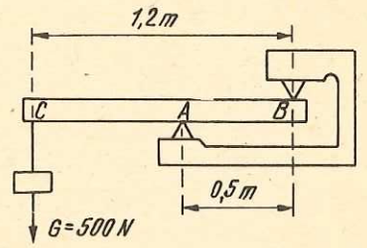


Fig. 8.43. La problema 9.

5. Să se determine rezultanta a trei forţe coplanare şi concurente care au mărimile $F_1 = F_2 = F_3 = 40$ N şi care fac între ele unghiuri de 120°.

R: $R = 0$.

6. De cablul unui funicular atîrnă un corp cu masa $m = 100$ kg. Cablul face între cele două părţi întinse unghiul $\alpha = 120°$. Ce forţă de întindere acţionează în cablu?

R: $T = 980$ N.

7. Se dau 6 forţe concurente egale în modul care fac între ele unghiuri de 60°. Să se afle rezultanta sistemului de forţe.

R: $R = 0$.

8. Să se calculeze prin metoda analitică, rezultanta sistemului de forţe reprezentat în figura 8.42. Se dau $F_1 = F_2 = F_3 = 40$ N, $F_4 = 20$ N.

R: $R \approx 39$ N.

9. O bară cu greutatea neglijabilă se sprijină în A şi B pe două suporturi (fig. 8.43). La extremitatea C a barei se suspendă o sarcină $G = 500$ N. Să se calculeze reacţiunile suporturilor asupra barei, în punctele de sprijin.

R: $N_A = 1\,200$ N; $N_B = 700$ N.

10. O grindă de greutate neglijabilă se sprijină în M şi N pe două suporturi (fig. 8.44). De grindă sînt suspendate trei sarcini $F_1 = 200$ N; $F_2 = 300$ N; $F_3 = 150$ N, în punctele A, B şi C. Să se determine:

a) modulul şi poziţia punctului de aplicaţie al rezultantei $\vec{R}_1$ a forţelor $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$;

b) modulul şi poziţia punctului de aplicaţie al rezultantei $\vec{R}_2$ a forţelor $\vec{R}_1$ şi $\vec{F}_3$.

R: *a)* $R_1 = 500$ N; la 18 cm de A; *b)* $R_2 = 650$ N; la 63 cm de C

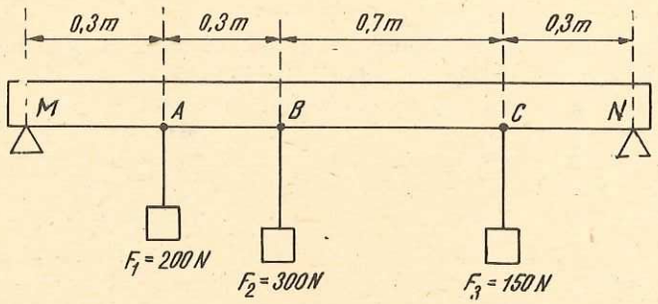


Fig. 8.44. La problema 10.

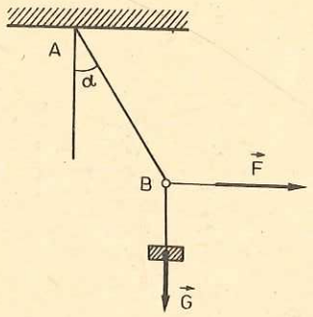


Fig. 8.45. La problema 12.

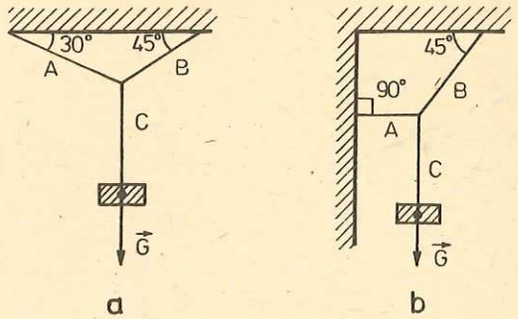


Fig. 8.46. La problema 13.

11. O șină de cale ferată cu lungimea $l = 10$ m și cu masa $m = 900$ kg este ridicată cu două frînghii paralele. Să se determine tensiunile din frînghii, dacă una dintre ele este fixată la un capăt al șinei iar cealaltă la distanța $d = 1$ m de celălalt capăt.

R: 4 000 N; 5 000 N.

12. De un fir fixat într-un punct A, se suspendă un corp cu masa $m = 2$ kg. Un al doilea fir este legat de primul în B (fig. 8.45). Asupra firului al doilea se exercită o forță orizontală $\vec{F}$. Care trebuie să fie mărimea forței $\vec{F}$, pentru ca unghiul α dintre AB și verticală să fie egal cu 45° ($g = 10$ m/s²)?

R: $F = G \operatorname{tg} \alpha = 20$ N.

13. Să se calculeze tensiunile din firele A, B și C din montajele reprezentate în figurile 8.46, *a* și *b*. Se dă $G = 80$ N.

R: *a)* $T_1 \approx 59$ N; $T_2 \approx 72$ N; $T_3 = 80$ N; *b)* $T_1 = 80$ N; $T_2 \approx 113$ N; $T_3 = 80$ N.

14. Trei forțe paralele cu intensitățile $F_1 = 1$ N; $F_2 = 4$ N; $F_3 = 7$ N sînt aplicate în trei puncte A, B și C, așezate în linie dreaptă, astfel ca $AB = BC = 10$ cm. A treia forță este de sens contrar celorlalte două. Să se determine intensitatea și punctul de aplicație D, al rezultantei celor trei forțe.

R: $R = 2$ N; $AD = 50$ cm; $CD = 30$ cm.

15. Un solid este acționat de două forțe concurente $F_1 = 5$ N și $F_2 = 10$ N care fac între ele un unghi de 120°. Să se determine forța F_3, concurentă cu primele două, ce trebuie aplicată solidului, pentru ca acesta să fie în echilibru.

R: $F_3 = 8{,}66$ N, perpendiculară pe F_1.

16. Un corp A, cu masa $m = 500$ g, este așezat pe un plan înclinat (fig. 8.47). Ce masă trebuie să aibă corpul B, suspendat la extremitatea firului care trece peste scripetele S, pentru a menține corpul A în echilibru? Se neglijează frecările.

R: $m_B = 250$ g.

17. O forță $F = 100$ N, orizontală, menține în echilibru static un corp așezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ față de orizontală (fig. 8.48). Frecările sînt neglijabile. Să se calculeze greutatea corpului și reacțiunea planului înclinat.

R: $G = 100$ N; $N = 100\sqrt{2}$ N.

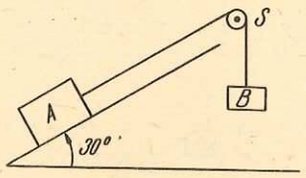


Fig. 8.47. La problema 16.

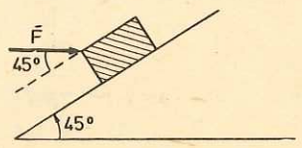


Fig. 8.48. La problema 17.

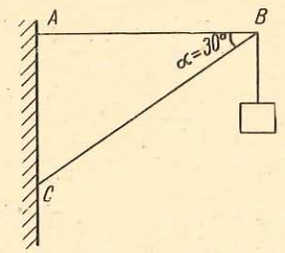


Fig. 8.49. La problema 18.

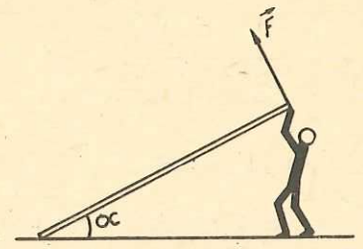


Fig. 8.50. La problemele 19 și 20.

18. Să se calculeze momentul greutății corpului suspendat în B (fig. 8.49), în raport cu punctele A, B și C, dacă $CB = 1$ m, $\alpha = 30°$ și masa corpului $m = 4$ kg.

R: $20\sqrt{3}$ N.m; 0 N.m; $20\sqrt{3}$ N.m.

19. În figura 8.50 este reprezentat un muncitor care ține o scîndură. În ce caz muncitorul acționează cu o forță maximă, cînd forța este perpendiculară pe scîndură sau cînd forța este îndreptată vertical în sus?

20. Un muncitor ține o scîndură de un capăt, astfel încît scîndura să facă un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala (fig. 8.50). Masa scîndurii este $m = 40$ kg. Să se calculeze mărimea forței cu care muncitorul susține scîndura, dacă direcția forței este perpendiculară pe scîndură.

R: $F = (mg \cos \alpha)/2 = 173$ N.

21. Un corp de formă cubică cu latura $l = 0{,}4$ m și cu masa $m = 40$ kg se află pe o suprafață orizontală. În fața corpului se află un mic prag B. La ce înălțime h trebuie aplicată o forță $F = 400$ N pentru ca reacțiunea normală în punctul A să fie nulă (fig. 8.51)? (*Indicație:* reacțiunea normală în A este nulă cînd corpul începe să se ridice în A deci cînd momentele forțelor $\vec{G}$ și $\vec{F}$ în raport cu punctul B vor fi egale.)

R: $h = Gl/(2F) = 0{,}2$ m.

22. O bară cu masa $m_0 = 10$ kg este montată așa cum se arată în figura 8.52, astfel încît să poată susține un corp cu masa $m = 100$ kg. Să se calculeze tensiunea în cablul AB.

R: $T = \dfrac{(2m + m_0)g \cos 45°}{2 \sin 15°} = 2\,849{,}6$ N.

23. O bară omogenă, de grosime constantă, are lungimea $l = 50$ cm și greutatea $G_1 = 40$ N. La una dintre extremitățile barei se sudează o sferă cu raza $R = 5$ cm și greutatea $G_2 = 10$ N. Să se determine poziția centrului de greutate a sistemului astfel format.

R: $d = 24$ cm, de la centrul sferei.

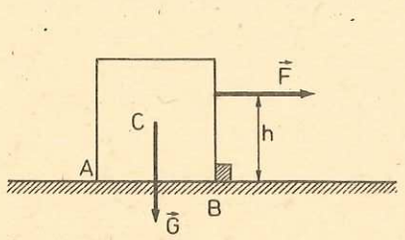


Fig. 8.51. La problema 21.

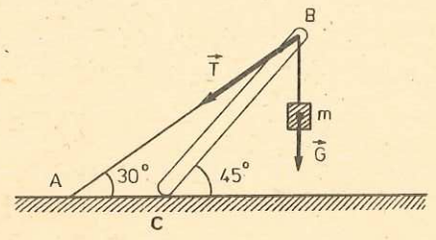


Fig. 8.52. La problema 22.

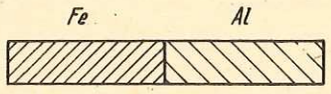


Fig. 8.53. La problema 27.

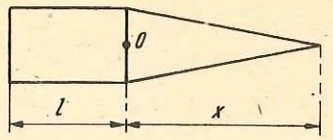


Fig. 8.54. La problema 28.

24. O placă pătrată omogenă este împărțită în patru pătrate. Se taie și se înlătură un pătrat. Să se determine poziția centrului de greutate al porțiunii rămase. Latura pătratului este $l = 1$ m.

R: $d = l\sqrt{2}/12 = 0{,}116$ m, față de centrul plăcii.

25. De la capătul unei bare cilindrice s-a tăiat o porțiune cu lungimea $l = 40$ cm. Să se calculeze distanța cu care s-a deplasat centrul de greutate al porțiunii rămase față de centrul de greutate al barei întregi.

R: $d = l/2 = 20$ cm.

26. Două bile cu razele egale sînt fixate în punctul de contact. Masa uneia dintre bile este de două ori mai mare decît a celeilalte. Să se determine poziția centrului de greutate al sistemului.

R: $d = (2/3)\ R$, față de centrul bilei cu masa mai mare.

27. O bară cilindrică cu lungimea $l = 30$ cm este făcută jumătate din oțel și jumătate din aluminiu (densitățile oțelului și aluminiului sînt $\rho_1 = 7\,860$ kg/m³ și $\rho_2 = 2\,700$ kg/m³). Să se determine poziția centrului de greutate al barei (fig. 8.53).

R: $x_{CG} = 11{,}34$ cm, față de extremitatea liberă a părții din oțel.

28. În figura 8.54 este reprezentată o placă metalică. Să se determine raportul dintre înălțimea x a părții triunghiulare și lungimea l a părții dreptunghiulare astfel ca centrul de greutate al plăcii să fie în punctul O.

R: $x = l\sqrt{3}$.

9

MECANICA FLUIDELOR

Mecanica fluidelor se ocupă cu echilibrul și mișcarea fluidelor și cu acțiunea lor asupra pereților ce le înconjură sau asupra corpurilor cufundate în ele.

Problema fundamentală a mecanicii fluidelor este determinarea repartiției presiunilor și a vitezelor în interiorul fluidelor.

Mecanica fluidelor are următoarele părți:

a) statica fluidelor, care cuprinde statica lichidelor (hidrostatica, care studiază lichidele în echilibru) și statica gazelor (aerostatica, care studiază gazele în echilibru);

b) dinamica fluidelor, care cuprinde dinamica lichidelor (hidrodinamica, care studiază mișcarea lichidelor) și dinamica gazelor (aerodinamica, care studiază mișcarea gazelor).

9.1. STAREA FLUIDĂ

Corpurile, din punctul de vedere al stării de agregare, se împart în trei mari categorii: solide, lichide și gaze. Lichidele și gazele poartă denumirea de fluide.

Solidele și fluidele se disting ușor prin caracteristicile lor diferite.

Noțiunea de solid este inseparabilă de cea de formă. În solide, moleculele fiind repartizate la distanțe mici unele față de altele, forțele de atracție dintre ele sînt mari, asigurînd solidelor o formă proprie. Din contră, noțiunea de fluid exclude complet noțiunea de formă.

Un fluid este, prin definiție, o substanță care poate curge și care ia forma vasului care o conține.

Lichidele sînt practic incompresibile. Forțele de coeziune dintre moleculele lichidelor fiind mici, forma lor poate fi modificată de o forță foarte

mică. Ele își recapătă forma inițială, în momentul cînd forța încetează să acționeze.

Un lichid este totdeauna mărginit de o anumită suprafață care îl separă de corpurile solide sau gazoase. Suprafața de separare dintre lichid și gaz se numește *suprafață liberă.*

Gazele sînt perfect elastice și umplu totdeauna volumele ce le conțin. Ca și lichidele și gazele la volum constant nu opun o rezistență apreciabilă la schimbarea formei.

Corpurile gazoase nu au suprafețe libere.

Fluidele reale opun o rezistență la alunecarea unui strat peste altul sau la înaintarea unui corp în fluide și de aceea spunem că sînt vîscoase. Viscozitatea este deci rezultatul frecării dintre straturile paralele de fluid care alunecă unul peste altul.

Un fluid incompresibil și lipsit de viscozitate se numește *fluid ideal.* Fluidul ideal este un model fizic, el nu există în realitate, însă este foarte util, deoarece ușurează studiul anumitor fenomene și oferă un termen de comparație comod. Acest model de fluid ideal constituie o aproximație satisfăcătoare pentru un număr mare de lichide și chiar de gaze, atîta timp cît vitezele acestora sînt mai mici decît viteza sunetului.

9.2. NOȚIUNEA DE PRESIUNE

Presiunea este o mărime fizică egală cu raportul dintre mărimea forței $\vec{F}$, care apasă normal și uniform pe o suprafață și aria S a acestei suprafețe (fig. 9.1):

$$p = \frac{F}{S}. \tag{9.1}$$

Deoarece apăsarea forței nu poate fi uniformă pe orice suprafață, atunci relația (9.1) reprezintă presiunea medie pe o suprafață.

Unitatea de măsură pentru presiune este egală cu raportul dintre unitatea de măsură a forței și unitatea de măsură a ariei, adică N/m^2. Această unitate se numește Pascal și se notează cu Pa,

$$1\ \text{Pa} = 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

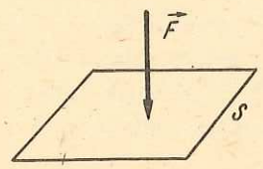


Fig. 9.1. Presiunea este raportul dintre mărimea forței ce apasă normal pe suprafață și aria suprafeței.

Pentru presiune se mai folosesc și unitățile următoare: torrul (torr), atmosfera fizică (atm), atmosfera tehnică (at).

$1\ \text{torr} = 1\ \text{mm Hg} \approx 133{,}3\ \text{N/m}^2$,

$1\ \text{atm} = 760\ \text{torr} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$,

$1\ \text{at} = 98\,066.5\ \text{N/m}^2$,

$1\ \text{torr} = 13{,}6\ \text{mm}\ H_2O$.

9.3. STATICA FLUIDELOR: HIDROSTATICA ȘI AEROSTATICA

Un fluid este în echilibru cînd fiecare porțiune de fluid este în repaus. Presiunea în fluidele în echilibru (în repaus) nu depinde decît de poziția punctului în care este definită.

9.3.1. **Forța exercitată de către un fluid în echilibru pe peretele vasului care îl conține.** Considerăm un vas în care se află un lichid (fig. 9.2). Datorită greutății sale, lichidul exercită o forță pe peretele vasului. Conform principiului acțiunilor reciproce și vasul exercită asupra lichidului o forță care echilibrează greutatea lichidului.

Să considerăm un element din suprafața peretelui vasului, notat cu S (fig. 9.2) Forța exercitată de lichid, pe elementul de suprafață S, este normală pe acest element. Dacă această forță, pe care o notăm cu $\vec{F}$, nu ar fi normală pe S, am putea să o descompunem într-o forță, componentă normală, $\vec{F}_n$ și o forță, componentă tangențială, $\vec{F}_t$. Sub acțiunea componentei tangențiale, lichidul s-ar deplasa în lungul peretelui vasului și nu ar putea fi în echilibru.

Existența forțelor de apăsare, exercitate de către gaze pe pereții vaselor în care sînt închise, poate fi pusă în evidență printr-un experiment simplu.

EXPERIMENT

Se introduce într-o cameră de minge de fotbal o anumită cantitate de pudră de talc foarte fină și apoi se umflă camera cu ajutorul unei pompe. Peretele elastic al camerei se întinde, sub acțiunea forțelor exercitate pe suprafața interioară a acesteia și camera ia o formă sferică. Această formă ne determină să admitem că forțele exercitate de gaz, pe peretele interior al camerei, au aceeași intensitate (fig. 9.3). Dacă se găurește camera cu un ac

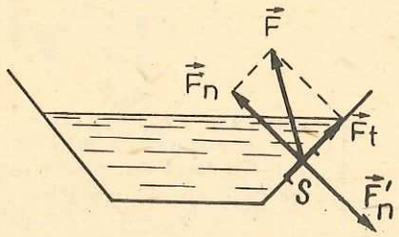


Fig. 9.2. Dacă lichidul ar exercita o forță de presiune oblică pe pereții vasului în care se află, atunci lichidul ar curge din vas.

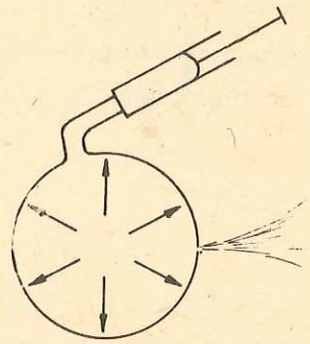


Fig. 9.3. Un gaz în echilibru — ca și un lichid în echilibru — exercită pe orice element de suprafață în contact cu el o forță de apăsare perpendiculară pe acest element de suprafață.

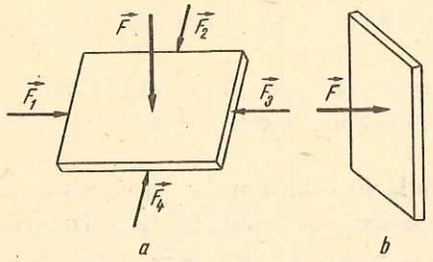


Fig. 9.4. Forța care acționează pe o suprafață din interiorul unui lichid este perpendiculară pe suprafață și nu depinde de orientarea acestei suprafețe în jurul centrului său.

foarte fin, continuînd să introducem în ea aer cu ajutorul pompei, constatăm că din cameră iese un jet de gaz perpendicular pe suprafața acesteia, făcut vizibil de către particulele de talc. Direcția de mișcare a particulelor de talc, care ies din camera de minge, dă direcția de acțiune a forțelor de presiune exercitate de gaz.

9.3.2. **Forța de apăsare exercitată de un fluid în echilibru pe suprafața unui corp cufundat în fluid.** Se introduce un solid în interiorul unui fluid (fig. 9.4). Fluidul exercită forțe de apăsare pe toate părțile suprafeței solidului care sînt în contact cu el. Pentru același motiv, arătat în paragraful precedent, aceste forțe sînt perpendiculare pe suprafețele pe care se exercită.

Existența forțelor de apăsare exercitate de lichide pe suprafețele corpurilor cufundate în lichide poate fi pusă în evidență cu ajutorul dispozitivului experimental prezentat în figura 9.5.

EXPERIMENT

Se folosește un cilindru de sticlă deschis la ambele capete și care poate fi astupat la partea inferioară cu un disc de plastic foarte ușor. De disc este legat un fir foarte subțire cu ajutorul căruia îl ținem în contact cu cilindrul, atunci cînd nu se află în lichid. Dacă se slăbește firul, cînd cilindrul este în aer, discul cade sub acțiunea propriei sale greutăți (fig. 9.5, *a*).

Se introduce cilindrul, astupat cu discul la partea inferioară, într-un vas cu apă. Se slăbește firul și se constată că discul nu cade. Asupra discului acționează o forță $\vec{F}$ orientată de jos în sus. Forța $\vec{F}$ este perpendiculară pe disc (fig. 9.5, *b*). Dacă forța $\vec{F}$ ar fi oblică, discul s-ar deplasa sub acțiunea

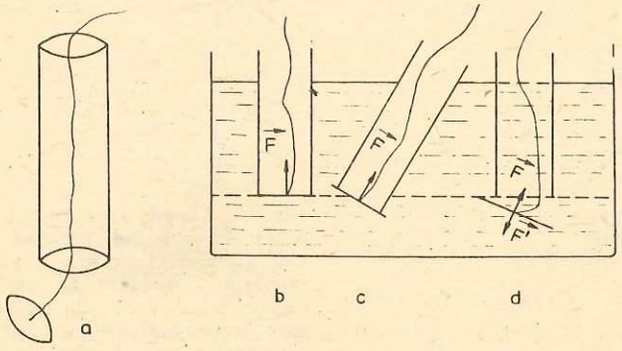


Fig. 9.5. Un lichid exercită pe orice suprafață în contact cu el o forță de apăsare perpendiculară pe această suprafață. În cazul *d* din figură, apa exercită pe cele două fețe ale discului forțele $\vec{F}$ și $\vec{F'}$ egale și opuse. În acest caz discul se desprinde de cilindru și cade sub acțiunea propriei sale greutăți.

acestei forțe și s-ar desprinde de cilindru. Se înclină cilindrul și se constată că discul nu se deplasează (fig. 9.5, *c*). Se readuce cilindrul în poziție verticală și se toarnă apă în el pînă la nivelul apei din vas. Se constată că discul se desprinde de cilindru, deci pe ambele fețe ale discului se exercită forțe egale și de sens opus (fig. 9.5, *d*).

9.3.3. **Presiunea hidrostatică.** În acest paragraf precum și în paragrafele următoare vom studia fenomenele specifice fluidelor lichide, dar concluziile se aplică și fluidelor gazoase.

Hidrostatica studiază lichidele în repaus. Statica lichidelor reale se confundă cu statica lichidelor ideale, deoarece forțele de viscozitate nu intervin în cazul lichidelor în repaus. Un lichid în echilibru se află numai sub acțiunea propriei sale greutăți. Datorită greutății lor, păturile de lichid care se află în contact exercită presiuni unele asupra altora; în cazul în care lichidul este în echilibru, presiunea exercitată la un anumit nivel se numește *presiune hidrostatică*.

Pentru a găsi factorii de care depinde presiunea într-un punct dintr-un lichid în echilibru vom folosi capsula manometrică. Se leagă capsula manometrică la un tub (*4*) în formă de *U* (fig. 9.6), prin intermediul unui furtun (*3*). Tubul (*4*) conține un lichid colorat, care are același nivel în ambele ramuri. Exercitînd o apăsare pe membrana elastică, aceasta comprimă aerul din cutie care determină o scădere a nivelului lichidului din ramura *A* a tubului în formă de *U* și o creștere a nivelului în ramura *B*. Acest aparat permite compararea presiunilor exercitate pe suprafața *S* a membranei (fig. 9.7).

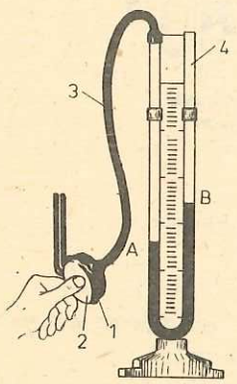


Fig. 9.6. Capsula manometrică folosită pentru punerea în evidență a forțelor exercitate pe suprafața unui solid introdus într-un lichid este alcătuită dintr-o cutie metalică *1* care are un perete elastic 2.

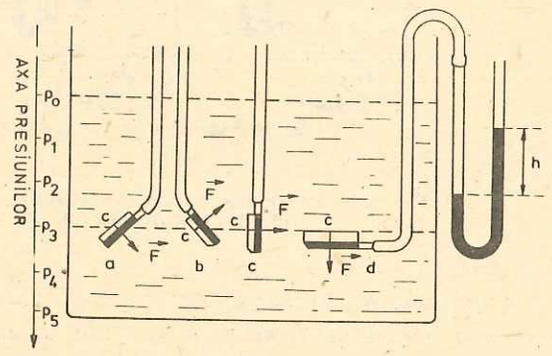


Fig. 9.7. Presiunea într-un lichid în repaus; *a)* crește cu adîncimea; *b)* are o valoare constantă în toate punctele unui plan orizontal; *c)* într-un punct din interiorul lichidului are aceeași valoare în toate direcțiile.

1. Se introduce capsula într-un vas cu apă, la o adîncime din ce în ce mai mare și se compară presiunile la diferitele nivele (fig. 9.7).

Se constată că presiunea într-un lichid în repaus crește cu adîncimea.

2. La o anumită adîncime în lichid se orientează membrana în diferite direcții încît centrul său C să rămînă în același punct din interiorul lichidului. Se constată că denivelarea în tubul în U rămîne constantă (fig. 9.7).

Rezultă că, *presiunea într-un punct al lichidului este independentă de orientarea suprafeței pe care se exercită. Într-un punct din interiorul lichidului presiunea are aceeași valoare în toate direcțiile.*

3. Se deplasează capsula astfel ca centrul membranei să rămînă în același plan orizontal; denivelarea h rămîne constantă.

Presiunea exercitată de un lichid în repaus este aceeași în toate punctele unui plan orizontal. Deci, într-un lichid în repaus, planele orizontale sînt suprafețe de egală presiune.

4. Se introduce succesiv capsula manometrică, la o adîncime H, în alcool, apă distilată, saramură (soluție de sare în apă) și se constată că denivelarea h variază în funcție de densitatea lichidului (fig. 9.8).

Fig. 9.8. Presiunea în puncte situate la aceeași adîncime în lichide diferite depinde de natura lichidului.

Presiunea în punctele aflate la aceeași adîncime în lichide diferite depinde de natura lichidului, fiind proporțională cu densitatea lichidului.

9.3.4. **Diferența de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid.** Într-un recipient se află un lichid în repaus. Limităm un volum V de lichid de formă paralelipipedică cu aria bazei S și înălțimea h. Presupunem că lichidul cuprins în volumul V a fost delimitat printr-o peliculă foarte subțire, fără greutate și inextensibilă, ceea ce nu modifică echilibrul volumului de lichid astfel delimitat (fig. 9.9). Lichidul cuprins în volumul V are greutatea:

$$G = \rho g S(h_2 - h_1) = \rho g S h, \tag{9.2}$$

unde ρ este densitatea lichidului, $h = h_2 - h_1$ este înălțimea paralelipipedului și S aria bazei paralelipipedului.

Presiunea exercitată de către lichid pe fața inferioară B a paralelipipedului, aflată la adîncimea h_2, are valoarea p_2. Pe fața superioară aflată la nivelul h_1 se exercită presiunea p_1. Forțele de apăsare exercitate de către lichid pe fețele paralelipipedului sînt normale pe aceste fețe. Forțele care acționează pe fețele laterale își anulează reciproc efectele, ele avînd valori egale și de sens opus. Pe fața superioară acționează forța $\vec{F}_1$, de intensitate $F_1 = p_1 S$, iar pe fața inferioară acționează forța $\vec{F}_2$, de intensitate $F_2 = p_2 S$. Scriind condiția de echilibru pentru paralelipiped, obținem:

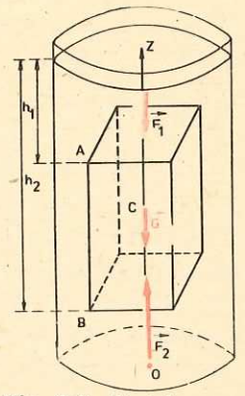


Fig. 9.9. Forțele care acționează pe fețele laterale ale paralelipipedului de lichid sînt egale și opuse. Diferența forțelor F_2 și F_1 este egală cu greutatea paralelipipedului de lichid.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0, \tag{9.3}$$

Proiectînd ecuația vectorială (9.3) pe axa Oz obținem:

$$p_2 S - p_1 S - \rho g S h = 0,$$

de unde

$$p_2 - p_1 = \rho g h, \tag{9.4}$$

unde $p_2 - p_1$ este diferența de presiune între nivelele h_2 și h_1 iar $h = h_2 - h_1$.

Putem enunța principiul fundamental al hidrostaticii:

Diferența de presiune între două puncte dintr-un lichid în echilibru este numeric egală cu greutatea unei coloane din acel lichid avînd ca bază unitatea de suprafață și ca înălțime distanța dintre planele care conțin punctele respective.

Dacă la nivelul *2* presiunea este p, iar nivelul *1* coincide cu suprafața liberă a lichidului, atunci:

$$p - H = \rho g h \text{ sau } p = H + \rho g h, \tag{9.5}$$

H fiind presiunea atmosferică.

Se constată că *presiunea hidrostatică este independentă de forma vasului în care se află lichidul și că este aceeași în toate punctele aflate la aceeași adîncime în lichid.* Din relația (9.5) rezultă că dacă se mărește presiunea pe suprafața liberă a lichidului, presiunea p din interiorul lichidului crește cu aceeași cantitate.

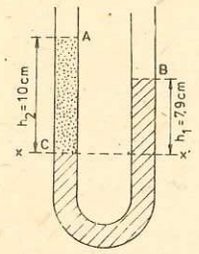


Fig. 9.10. Pentru problema rezolvată.

EXEMPLU

Într-un tub în formă de U (fig. 9.10) se toarnă apă cu densitatea $\rho_1 = 1{,}00$ g/cm³ și apoi în una dintre ramuri se toarnă un lichid care nu se amestecă cu apa, de densitate ρ_2 necunoscută. Înălțimile coloanelor de lichid, în cele două ramuri, deasupra suprafeței de separare a lichidelor, sînt indicate pe figura 9.10. Să se calculeze densitatea ρ_2.

Rezolvare. Suprafețele de separare apă-aer, apă-lichid, lichid-aer sînt plane orizontale. În A și B presiunile p_A și p_B sînt egale cu presiunea atmosferică $H (p_A = p_B = H)$.

Pe suprafața de separare xx' apă-lichid, presiunile în apă și în lichid sînt egale ($p_1 = p_2$). La acest nivel presiunile sînt:

$p_1 = H + \rho_1 g h_1$, presiunea în apă, și
$p_2 = H + \rho_2 g h_2$, presiunea în lichid.

Deoarece $p_1 = p_2$, rezultă:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \text{ și } \rho_2 = \frac{\rho_1 h_1}{h_2} = 0{,}79 \text{ g/cm}^3.$$

9.3.5. **Măsurarea presiunii atmosferice.** Aerul este cel mai răspîndit gaz. El înconjură toată suprafața Pămîntului într-o pătură foarte groasă numită atmosferă terestră.

Aerul este peste tot în jurul nostru, însă noi nu-l vedem el fiind incolor, fără gust și fără miros.

Atmosfera este alcătuită dintr-un amestec de gaze cu vapori de apă, cristale de gheață, praf și diverse impurități. Compoziția atmosferei variază atît cu altitudinea cît și pe suprafața terestră. Atmosfera nu are o limitare precisă, ea trece treptat în spațiul interplanetar.

Masa atmosferei este enormă, ea fiind egală cu $6 \cdot 10^5$ tone. Greutatea acestei mase de aer exercită o presiune continuă pe suprafața Pămîntului, numită *presiune atmosferică*. Datorită presiunii atmosferice, pe suprafețele aflate în atmosferă, se exercită forțe de apăsare foarte mari.

Datorită greutății aerului straturile inferioare de aer sînt comprimate de către cele superioare. Deci densitatea atmosferică scade cu înălțimea.

EXEMPLU

Să se determine forța de apăsare exercitată de către aerul atmosferic pe una dintre fețele geamului unei ferestre de formă dreptunghiulară cu laturile de 80 cm și 120 cm.

Presiunea atmosferică are valoarea $H = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rezolvare. Forța de apăsare are intensitatea:

$$F = HS = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 0{,}96 \text{ m}^2 = 9{,}72 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Forța de presiune exercitată pe geam echivalează cu greutatea unei mase de 9,72 tone. Geamul rezistă acestei presiuni mari, deoarece el este presat pe ambele fețe.

Aerul aflat deasupra noastră și în jurul nostru apasă din toate părțile pe corpul nostru. Forțele de presiune mari exercitate asupra noastră nu sînt supărătoare pentru că organismul nostru s-a adaptat acestor condiții de presiune. Nu am putea să respirăm normal sau chiar să trăim, dacă această presiune s-ar modifica mult.

Presiunea atmosferică într-un punct al atmosferei este egală cu greutatea unei coloane de aer, cu secțiune egală cu unitatea și cu înălțimea egală cu diferența de nivel dintre acel punct și suprafața liberă a atmosferei. Această presiune nu se poate calcula, deoarece nu se cunoaște cu precizie limita superioară a atmosferei și datorită faptului că atmosfera nu este statică.

Presiunea atmosferică se poate determina experimental printr-o metodă simplă propusă de către fizicianul italian Torricelli în anul 1643.

Pentru determinarea presiunii atmosferice se folosește un tub cu lungimea de aproximativ un metru și închis la unul dintre capete, numit tub barometric sau tubul lui Torricelli. Tubul barometric se umple cu mercur, apoi se astupă cu degetul și se răstoarnă într-o cuvă cu mercur. Retrăgînd degetul se constată că o parte din mercurul din tub coboară în cuvă. Coloana de mercur rămasă în tub, măsurată de la suprafața liberă a mercurului din cuvă pînă la suprafața liberă a mercurului din tub, are o înălțime h de aproximativ 76 cm (fig. 9.11, *a* și *b*). Pe suprafața liberă a mercurului din tub presiunea este zero ($p_C = 0$), deoarece deasupra acestei suprafețe este vid. Porțiunea tubului în care se află vid se numește cameră barometrică.

Mercurul fiind în echilibru, presiunea în toate punctele planului orizontal AB, care cuprinde și suprafața liberă a mercurului din cuvă, este constantă (fig. 9.11, *b*). Deci presiunile în punctele A și B sînt egale ($p_A = p_B$). În A se exercită presiunea atmosferică pe care o notăm cu H, deci $p_A = H$. În B, acționează presiunea hidrostatică datorată coloanei de mercur:

$$p_B - p_C = \rho g h,$$

deoarece $p_C = 0$, rezultă:

$$p_B = H = \rho g h.$$

Deci, presiunea atmosferică este egală cu presiunea hidrostatică a coloanei de mercur din tub. Măsurarea presiunii atmosferice, într-un anumit punct din atmosferă, se reduce la măsurarea lungimii coloanei de mercur h; ρ și g fiind mărimi cunoscute.

Cum presiunea hidrostatică este independentă de forma și secțiunea vasului, rezultă că dacă se înclină tubul sau se face experiența cu tuburi de forme diferite, înălțimea coloanei de mercur h nu se modifică (fig. 9.12).

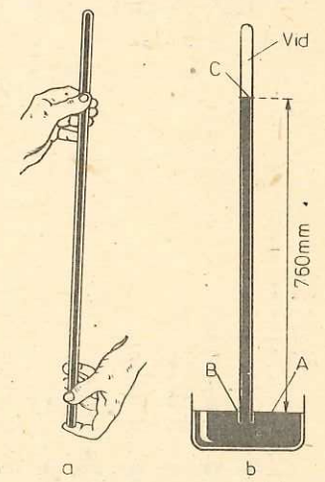


Fig. 9.11. Experiența lui Torricelli.

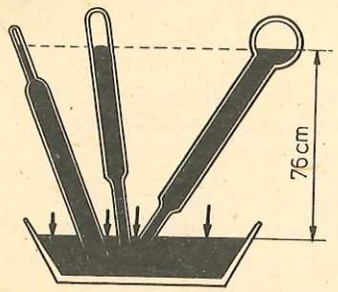


Fig. 9.12. Înălțimea coloanei de mercur este independentă de forma, de secțiunea și de înclinarea tubului.

Presiunea atmosferică variază:

— cu *altitudinea*, datorită greutății aerului. Măsurătorile au arătat că această variație nu este uniformă (fig. 9.13);

— cu *starea vremii*. Starea vremii depinde de deplasarea maselor de aer atmosferic, adică de mișcările ciclonilor și anticiclonilor atmosferici;

— *de la un loc la altul*. Pe hărțile meteorologice se observă linii continue, care unesc punctele în care presiunea are aceeași valoare la un moment bine determinat. Curbele acestea se numesc *izobare* și sînt foarte utile pentru prevederea stării vremii.

Avînd în vedere că presiunea variază de la un loc la altul și chiar în același loc de la o oră la alta, se impune definirea unei presiuni de referință, numită *presiune atmosferică normală*.

Presiunea atmosferică normală se consideră, prin convenție, ca fiind egală cu 760 torr.

Exprimată în N/m² presiunea atmosferică normală are valoarea $H_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

Instrumentele cu care se măsoară presiunea atmosferică și se observă schimbările ei se numesc *barometre*. În practică se folosesc două feluri de barometre: *a) barometrul metalic*, a cărui funcționare se bazează pe echilibrarea forțelor de presiune atmosferică de către forțele elastice ale unui resort; *b) barometrul cu mercur*, a cărui funcționare se bazează pe echilibrarea presiunii atmosferice de către presiunea hidrostatică a unei coloane de mercur. Primul barometru de acest tip a fost tubul lui Torricelli.

9.3.6. **Măsurarea presiunii gazelor. Manometrul cu lichid.** Presiunile în fluide (gazoase sau lichide) se măsoară cu instrumente numite *manometre*. Vom descrie doar manometrul cu lichid folosit pentru măsurarea presiunii gazelor.

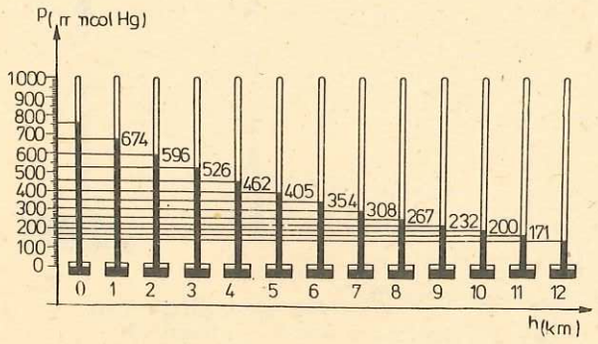


Fig. 9.13. Presiunea atmosferică variază cu altitudinea.

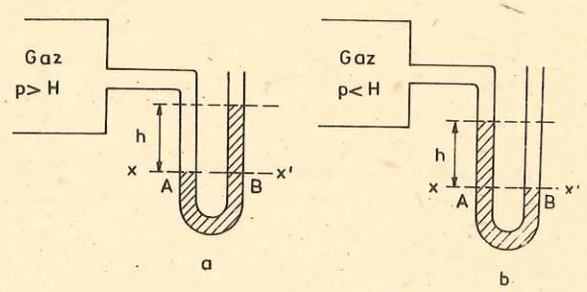


Fig. 9.14. Principiul manometrului cu lichid.

Manometrul cu lichid este alcătuit dintr-un tub în formă de U, deschis la ambele capete, în care s-a turnat un lichid de densitate ρ (spre exemplu mercur sau apă).

O ramură a tubului în U comunică cu atmosfera, iar cealaltă ramură comunică cu gazul de presiune p. În cazurile prezentate în figura 9.14, dacă H este presiunea atmosferică, presiunea de măsurat este dată de relația

$$p = H \pm \rho gh. \tag{9.6}$$

În relația (9.6) se ia semnul plus cînd $p > H$ și semnul minus cînd $p < H$.

Diferența de presiune

$$p - H = \pm \rho gh, \tag{9.7}$$

se numește *presiune relativă* sau *presiune manometrică*.

Lichidul manometric se alege în funcție de presiunea de măsurat. Spre exemplu, un manometru cu apă dă o denivelare de 13,6 ori mai mare decît un manometru cu mercur.

Pentru măsurarea directă a presiunii p, se folosește, în locul tubului în U deschis, un barometru cu sifon racordat cu un tub de cauciuc la recipientul care conține gazul (fig. 9.15.) În acest caz presiunea gazului este echilibrată de presiunea hidrostatică a unei coloane de mercur h:

$$p = \rho gh.$$

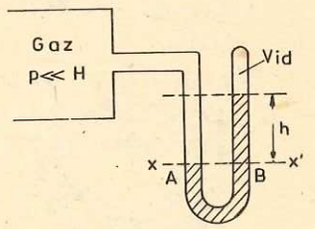


Fig. 9.15. Manometru cu lichid cu tubul închis, numit manometru barometric.

EXEMPLU

Un manometru cu mercur (fig. 9.14, *b*) este pus în legătură cu un gaz de presiune p. Denivelarea manometrică este $h = 5$ mm. Presiunea indicată de un barometru este $H = 753$ torr. Care este presiunea gazului? Care este denivelarea h_a, în cazul folosirii unui manometru cu apă?

Rezolvare. Presiunea gazului fiind mai mică decît presiunea atmosferică, rezultă

$$p = H - \rho gh.$$

Ținînd cont de valorile numerice obținem:

$$p = 753 \text{ torr} = 753 \text{ torr} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ torr}} = 0{,}99 \text{ atm} =$$

$$= 0{,}99 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \simeq 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ at}.$$

Dacă lichidul barometric ar fi apa, acest lichid ar trebui să producă o presiune hidrostatică egală cu aceea produsă de mercur:

$$\rho_{Hg} \cdot g h_{Hg} = \rho_a \cdot g h_a; \; h_a = \frac{13\,600 \cdot 5}{1\,000} = 68 \text{ mm}.$$

9.3.7. Transmiterea presiunii în lichide. Legea lui Pascal

EXPERIMENT

Se umple complet cu apă un vas cu două deschideri tubulare (fig. 9.16) și se astupă fiecare deschidere cu un dop de cauciuc uns cu grăsime. Se are în vedere ca dopurile să fie în contact cu apa. Dacă se presează puternic pe unul dintre dopuri celălalt este aruncat în aer. Variația presiunii din B se transmite și în A și determină dopul A să sară din locașul său.

Experimentul descris mai sus ilustrează *legea lui Pascal* care se enunță astfel:

Presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul cît și la pereții vasului care-l conține.

Legea lui Pascal este o consecință a legilor staticii fluidelor și rezultă din acestea.

Fie p_A și p_B presiunile în punctele A și B dintr-un lichid în repaus (fig. 9.17). Conform principiului fundamental al hidrostaticii rezultă:

$$p_B - p_A = \rho g h.$$

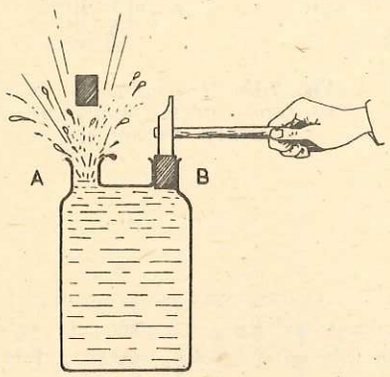


Fig. 9.16. Dispozitiv experimental pentru punerea în evidență a transmiterii presiunii printr-un lichid.

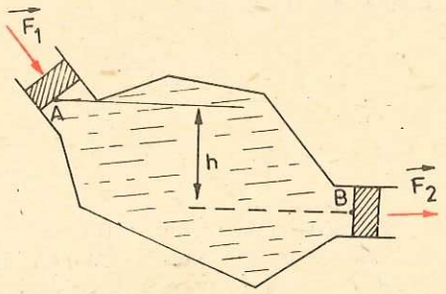


Fig. 9.17. Transmiterea presiunii printr-un lichid.

Cum mărimile ρ, g, h sînt constante, diferența de presiune este și ea constantă, chiar dacă se mărește sau se micșorează presiunea din punctele A și B. Deci, orice variație de presiune în A provoacă o variație egală de presiune în B, precum și în toate punctele lichidului.

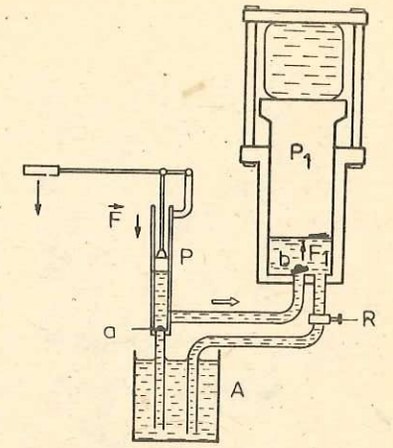


Fig. 9.18. Principiul de funcționare a presei hidraulice.

9.3.8. **Aplicații ale legii lui Pascal. Presa hidraulică.** Una dintre aplicațiile principale ale legii lui Pascal este presa hidraulică al cărei principiu este dat în figura 9.18. Două vase cilindrice comunică între ele prin partea inferioară. Cei doi cilindri sînt închiși la partea superioară prin două pistoane mobile P și P_1.

Se exercită pe pistonul P, de secțiune S, o forță normală $\vec{F}$. Această forță produce în toate punctele lichidului o creștere a presiunii, egală cu:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{9.8}$$

Această presiune este integral transmisă pe fața inferioară a pistonului P_1, de secțiune S_1, care este astfel acționat de o forță $\vec{F}_1$, de mărime:

$$F_1 = pS_1. \tag{9.9}$$

Din relațiile (9.8) și (9.9) obținem:

$$F_1 = F \frac{S_1}{S}. \tag{9.10}$$

Intensitatea forței F_1 este cu atît mai mare cu cît raportul ariilor fețelor pistoanelor este mai mare.

Presa hidraulică este folosită pentru a comprima paiele și bumbacul în baloturi, pentru a extrage uleiul din diferitele semințe, la fabricarea caroseriilor de automobil și a obiectelor din material plastic etc.

O aplicație a presei hidraulice este și sistemul de frînare al automobilelor, schematizat în figura 9.19.

O apăsare pe pedala *1* produce o creștere a presiunii în cilindrul *3*. Această creștere de presiune este transmisă prin intermediul lichidului *2*, pistoanelor *4*, care împing saboții *6*, pe tamburul *5*.

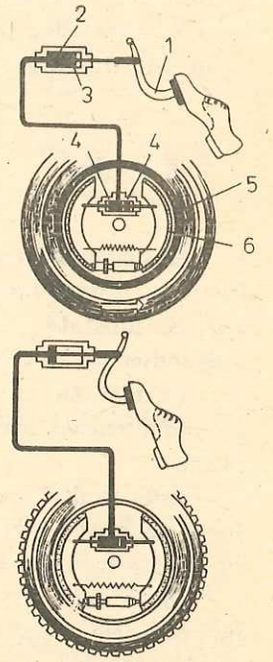


Fig. 9.19. Frîna hidraulică.

BLAISE PASCAL (1623—1662).

Matematician, fizician, filozof şi scriitor francez. Pascal a fost un spirit precoce care s-a manifestat foarte timpuriu. La 12 ani, el regăseşte singur, primele teoreme ale geometriei lui Euclid. La 16 ani, scrie un „Tratat despre secţiunile conice". Pascal este fondatorul teoriei probabilităţilor. A inventat o maşină de calcul în anul 1642.

În domeniul fizicii, activitatea lui Pascal a fost îndreptată, mai ales, asupra presiunii atmosferice şi asupra vidului. Pascal a descoperit legea fundamentală a hidrostaticii care stă la baza tuturor sistemelor hidraulice.

9.3.9. **Legea lui Arhimede.** Pentru a introduce o sticlă goală într-o căldare cu apă, trebuie să se exercite asupra ei o forţă de apăsare destul de mare. O minge de tenis de masă introdusă pe fundul unui vas cu apă şi apoi lăsată liberă, iese singură la suprafaţă. Dacă o piatră grea este introdusă în apă, cînd este ridicată, ea pare mai uşoară decît în aer. Greutatea pietrei nu s-a modificat, pentru că forţele de atracţie gravitaţională sînt independente de natura mediului care separă corpurile. Fie că piatra este în aer sau în apă, forţa de atracţie pe care o exercită Pămîntul asupra ei, este aceeaşi. Rezultă că lichidul împinge corpul vertical în sus. Vom dovedi aceasta experimental.

EXPERIMENT

Se suspendă un cilindru de fier, cu ajutorul unui fir, de un dinamometru. Citim pe dinamometru greutatea sa, de exemplu 2,5 N. Se cufundă corpul în apă. Se constată că direcţia firului de suspensie nu s-a modificat. Dinamometrul indică acum o forţă de numai 1,5 N (fig. 9.20).

Rezultă că *un corp cufundat într-un lichid este împins de către lichid cu o forţă verticală orientată de jos în sus. Această forţă se numeşte forţă arhimedică.*

Înlocuind cilindrul metalic cu un alt corp mai voluminos se constată că forţa arhimedică este mai mare. Deci, *forţa de împingere exercitată asupra unui corp cufundat într-un lichid creşte cu volumul de lichid dezlocuit.*

Se cufundă acum corpul într-un alt lichid, în alcool sau în soluţie de sare de bucătărie în apă şi se constată că indicaţiile dinamometrului s-au modificat. Deci, *forţa de împingere exercitată de un lichid, asupra unui corp cufundat în el, depinde de densitatea lichidului.*

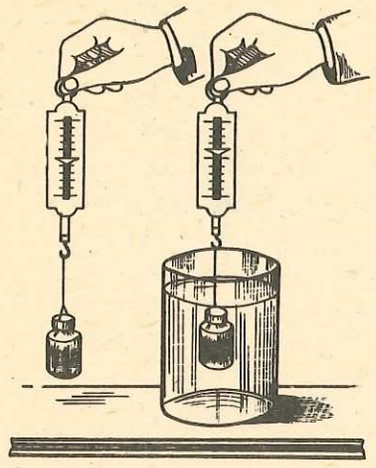


Fig. 9.20. Apa exercită asupra cilindrului o forţă de apăsare verticală, orientată de jos în sus.

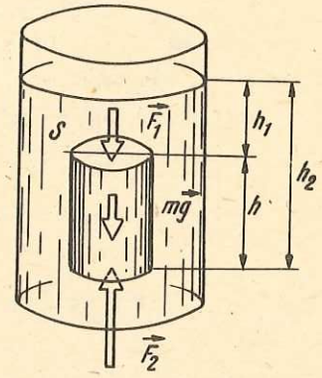


Fig. 9.21. Orice corp cufundat într-un fluid este împins vertical în sus cu o forţă egală cu greutatea fluidului dezlocuit.

Legea lui Arhimede se enunţă astfel:

un corp cufundat într-un fluid în repaus este împins cu o forţă verticală de jos în sus, egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp.

Legea lui Arhimede este, de asemenea, o consecinţă a legilor fundamentale ale staticii fluidelor, şi deci se poate deduce din acestea.

Considerăm un corp de forma unui cilindru drept cufundat în poziţie verticală într-un lichid în repaus (fig. 9.21). Notăm cu S aria bazei şi cu h înălţimea cilindrului.

Conform principiului fundamental al hidrostaticii, forţele de apăsare pe suprafaţa laterală a cilindrului îşi fac echilibru. Rezultanta forţelor de presiune verticale, normale pe bazele cilindrului, este:

$$F_A = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)S,$$

sau ţinînd seamă de relaţia (9.4), obţinem:

$$F_A = \rho g(h_2 - h_1)S = \rho hSg = G_l, \qquad (9.11)$$

unde $h = h_2 - h_1$ este înălţimea cilindrului, ρ este densitatea lichidului, iar G_l este greutatea lichidului dezlocuit de corp.

Deci, rezultanta $\vec{F}_A$ a forţelor de presiune exercitate asupra corpului cufundat în fluid, numită forţă arhimedică, este egală şi de sens opus cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp. Punctul în care se aplică forţa arhimedică se numeşte *centru de presiune.* În general, centrul de presiune este diferit de centrul de greutate, în afară de cazul particular cînd corpul cufundat în fluid este omogen. În acest caz, centrul de greutate şi centrul de presiune coincid.

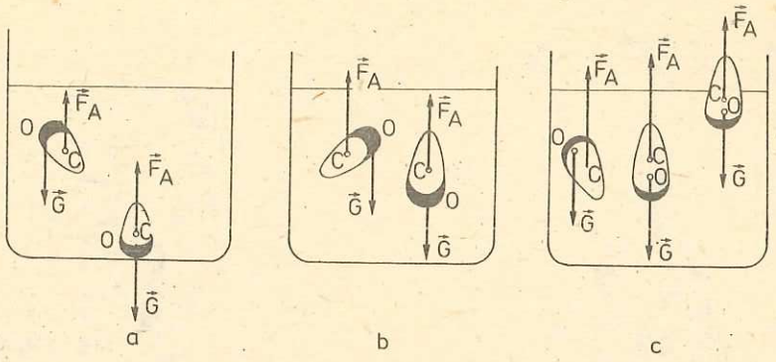


Fig. 9.22. Echilibrul corpurilor cufundate într-un lichid.

Legea lui Arhimede se aplică fluidelor lichide sau gazoase, lichidelor neomogene în repaus (de exemplu în cazul a două lichide care nu se amestecă, turnate unul peste altul) cît şi pentru corpurile necufundate complet.

9.3.10. **Plutirea corpurilor.** Un corp introdus într-un lichid este supus acţiunii a două forţe: greutatea sa $\vec{G}$ aplicată în centrul de greutate al corpului şi forţa arhimedică $\vec{F}_A$ aplicată în centrul de presiune C. Trei cazuri se pot ivi (fig. 9.22):

a) $G > F_A$. Rezultanta $\vec{G}_a = \vec{G} + \vec{F}_A$ se numeşte greutatea aparentă şi are modulul:

$$G_a = mg - \rho_f V g = mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right), \qquad (9.12)$$

unde ρ_f este densitatea fluidului iar ρ_s este densitatea solidului. Dacă $\rho_f < \rho_s$ corpul se cufundă.

b) $G = F_A$. Greutatea aparentă este zero şi corpul rămîne în echilibru în interiorul lichidului. Dacă corpul este omogen, condiţia se scrie: $\rho_f = \rho_s$. În acest caz centrul de presiune coincide cu centrul de greutate. Dacă solidul este neomogen, centrul de presiune şi centrul de greutate nu coincid. Pentru ca echilibrul să fie stabil este suficient ca centrul de greutate şi centrul de presiune să fie pe aceeaşi verticală, iar centrul de greutate să se găsească sub centrul de presiune.

c) $G < F_A$. Rezultanta $\vec{F}_a = \vec{G} + \vec{F}_A$ se numeşte forţă ascensională. Un corp cufundat este adus la suprafaţa lichidului de către forţa ascensională. Pe măsură ce corpul iese din lichid forţa arhimedică scade. În momentul cînd greutatea corpului echilibrează forţa arhimedică, corpul pluteşte în echilibru la suprafaţa lichidului.

Pentru un corp omogen condiţia de plutire la suprafaţa lichidului se scrie: $\rho_f > \rho_s$.

Condiţia de plutire a corpurilor se enunţă astfel: *dacă un corp pluteşte în echilibru în interiorul sau la suprafaţa unui lichid în repaus, greutatea corpului este egală cu greutatea volumului de lichid dezlocuit de corp.*

9.3.11. **Consecinţe şi aplicaţii ale plutirii corpurilor.**

A. *Corpuri în echilibru în interiorul unui lichid.*

Submarinul este o navă care poate pluti la suprafaţa apei. Submarinul posedă nişte rezervoare laterale numite balast-apă. Cînd acestea se umplu cu apă nava se scufundă, iar cînd apa este evacuată cu ajutorul pompelor, submarinul urcă la suprafaţă (fig. 9.23).

Batiscaful destinat explorărilor submarine funcţionează pe acelaşi principiu ca şi submarinul.

B. *Corpuri care plutesc la suprafaţa apei.*

Icebergurile sînt blocuri uriaşe de gheaţă care plutesc pe mare, deoarece densitatea gheţii este mai mică decît densitatea apei (fig. 9.24). Porţiunea din volumul unui iceberg cufundat în apă reprezintă 11/12 din volumul total.

Navele, datorită formei lor, dezlocuiesc un volum foarte mare de apă, în consecinţă forţa arhimedică este mult mai mare decît greutatea lor. O navă de 10 000 tone trebuie să dezlocuiască cel puţin 10 000 m^3 de apă pentru a putea pluti.

Plutirea navelor este stabilă cînd centrul de greutate se află pe aceeaşi verticală cu centrul de presiune şi deasupra centrului de presiune (fig. 9.25). Cînd nava oscilează centrul de presiune îşi schimbă poziţia. În acest caz greutatea $\vec{G}$ şi forţa arhimedică $\vec{F}_A$ formează un cuplu care tinde să readucă nava în poziţia iniţială. Suportul forţei arhimedice întîlneşte verticala de stabilitate într-un punct M numit metacentru. Echilibrul este stabil dacă metacentrul este deasupra centrului de greutate. Punctul M are o poziţie fixă în raport cu nava.

C. *Densimetrele* sînt instrumente utilizate pentru determinarea densităţii lichidelor.

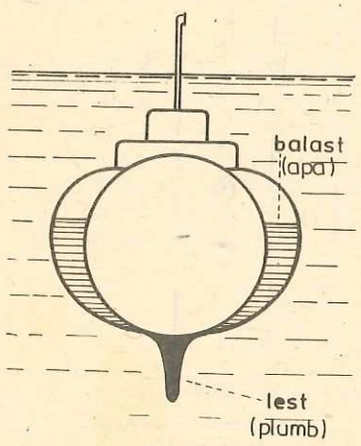


Fig. 9.23. Submarinul.

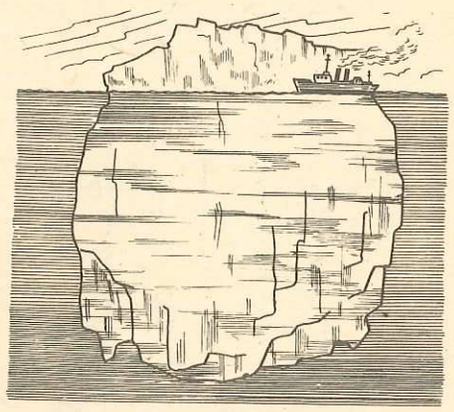


Fig. 9.24. Iceberg.

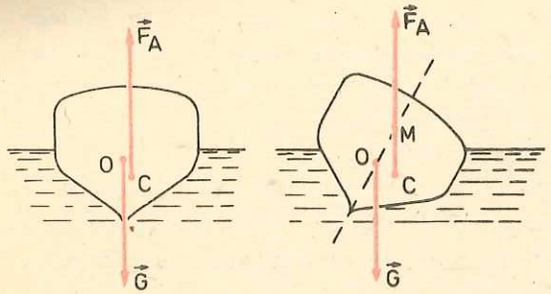


Fig. 9.25. Echilibrul unei nave.

Un densimetru este alcătuit dintr-un tub de sticlă numit plutitor, în care se află la partea de jos alice de plumb sau mercur, prelungit cu o tijă de sticlă subțire.

Densimetrele se gradează în unități de densitate. Gradațiile se fac pe tija de sticlă.

Există două feluri de densimetre:

— densimetre pentru lichide cu densitatea mai mică decît a apei, gradate de la *0,6* la *1*. Introduse în apă, acestea se cufundă pînă la baza tijei, unde se află gradația *1* (fig. 9.26). Gradația *1* de la baza tijei reprezintă densitatea apei de 1 g/cm³;

— densimetre pentru lichide mai dense decît apa, gradate de la *1* la *2*. Introduse în apă, ele se cufundă pînă aproape de extremitatea superioară a tijei, unde se află gradația *1* (fig. 9.27).

EXEMPLE

1. O sferă cu densitatea $\rho_1 = 500$ kg/m³ cade fără viteză inițială de la înălțimea $h_1 = 20$ m, într-un bazin adînc, plin cu apă (fig. 9.28). Să se calculeze adîncimea la care se va opri sfera în apă. Densitatea apei este $\rho_2 = 1\,000$ kg/m³; $g = 10$ m/s².

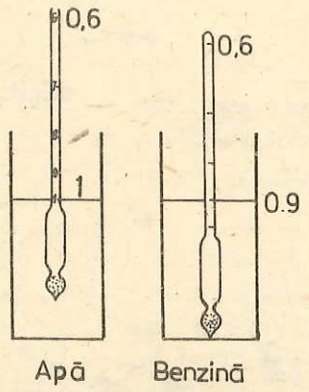


Fig. 9.26. Densimetre pentru lichide cu densitatea mai mică decît densitatea apei.

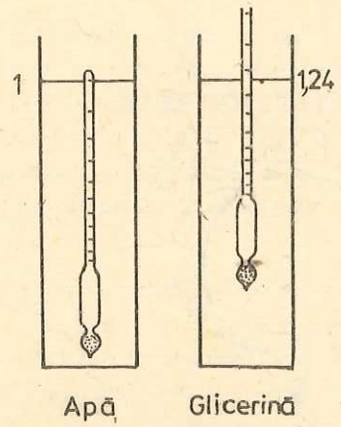


Fig. 9.27. Densimetre pentru lichide cu densitatea mai mare decît densitatea apei.

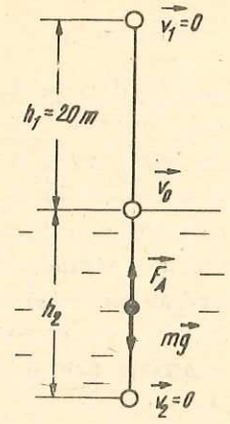


Fig. 9.28. La exemplul 1.

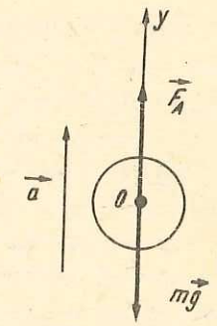


Fig. 9.29. La exemplul 2.

Rezolvare. a) *Calculul vitezei sferei în momentul cînd atinge suprafața apei.* Aplicînd formula lui Galilei obținem:

$$v_0 = \sqrt{2gh_1} = 20 \text{ m/s}.$$

b) *Calculul accelerației sferei în timpul mișcării ei în apă.* În timpul mișcării în apă asupra sferei acționează forța arhimedică $F_A = \rho_2 Vg$ și greutatea sa $G = mg$ (fig. 9.28). Scriem relația fundamentală a dinamicii pentru mișcarea sferei în apă:

$$F_A - mg = ma. \tag{9.13}$$

Din relația (9.13), obținem:

$$a = \frac{F_A}{m} - g.$$

Înlocuind în această relație forța arhimedică prin valoarea sa și masa corpului prin $m = \rho_1 V$, obținem:

$$a = g\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) = 10 \text{ m/s}^2.$$

c) *Calculul adîncimii* h_2, *la care se oprește sfera:*

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2a} = 20 \text{ m}.$$

2. Un aerostat cu masa $m = 500$ kg și volumul $V = 600$ m³ se ridică pe verticală într-o mișcare uniform accelerată (fig. 9.29).

Să se calculeze înălțimea la care se ridică aerostatul în timpul $t = 10$ s. Densitatea aerului este $\rho = 1{,}3$ kg/m³; $g = 10$ m/s². Se neglijează rezistența aerului.

Rezolvare. a) *Calculul accelerației aerostatului.* Asupra aerostatului acționează forța arhimedică $F_A = \rho g V$ (unde ρ este densitatea aerului) și greutatea $G = mg$. Scriind relația fundamentală a dinamicii pentru mișcarea aerostatului, obținem:

$$F_A - mg = ma.$$

$$a = \frac{F_A}{m} - g = \frac{\rho g V}{m} - g = 5{,}6 \text{ m/s}^2.$$

b) *Calculul înălțimii la care urcă aerostatul în timpul* $t = 10$ s:

$$h = \frac{at^2}{2} = 280 \text{ m}.$$

9.4. DINAMICA FLUIDELOR

9.4.1. **Curgerea staționară.** Prin curgerea unui fluid se înțelege deplasarea acestuia față de un sistem de referință dat. Un fluid ideal, adică un fluid incompresibil și lipsit de viscozitate, poate fi pus în mișcare datorită greutății sale și diferenței de presiune între diferitele puncte din interiorul său.

Fenomenele de mișcare a fluidelor au un caracter macroscopic, fluidele fiind asimilate cu medii continue. În cazul fluidelor continue este posibilă o mișcare care să constea din deplasarea diferitelor părți ale aceluiași corp una față de alta. Pentru descrierea curgerii unui fluid, îl vom considera alcătuit dintr-un număr foarte mare de particule, caracterizate prin aceea că au un *volum* foarte mic în raport cu acela al corpului.

Studiem mișcarea particulelor fluidului în raport cu un anumit sistem de referință, față de care fixăm pozițiile particulelor de fluid.

Mișcarea unui fluid este caracterizată prin distribuția vitezelor și a presiunilor în interiorul fluidului. Aceste mărimi variază de la un punct la altul. În același punct ele pot varia, de asemenea, în funcție de timp. În acest caz curgerea (mișcarea) fluidelor se numește nepermanentă (nestațională) sau variată. De viteză este legată și noțiunea de *linie de curent. Se numește linie de curent la un moment dat t, linia curbă care are proprietatea că, la acel moment, vitezele diferitelor particule care se află pe ea îi sînt tangente* (fig. 9.30). În general aceste particule au traiectorii care nu se confundă cu linia de curent pe care se află ele la un moment dat *t*.

Cînd viteza în diferitele puncte ale spațiului ocupat de fluid nu depinde explicit de timp, ci numai de poziția în care se află particula de fluid considerată, curgerea se numește *staționară.*

În cazul curgerii nestaționare, forma liniilor de curent se schimbă de la un moment la altul. În cazul curgerii staționare, aspectul liniilor de curent rămîne neschimbat, forma lor fiind independentă de timp și atunci traiectoriile particulelor de fluid coincid cu liniile de curent. În curgerea staționară putem fixa poziția unei particule de fluid de-a lungul liniei de curent cu ajutorul coordonatei curbilinii *s* (fig. 9.30). Cum viteza și presiunea variază de la un punct la altul, înseamnă că ele sînt funcții de *s:*

$$v = v(s);\ p = p(s). \tag{9.14}$$

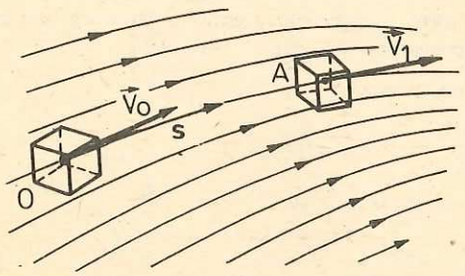


Fig. 9.30. Linii de curent în interiorul unui fluid ideal. În cazul mișcării staționare acestea coincid cu traiectoriile particulelor de fluid. Poziția unei particule de fluid pe linia de curent se poate determina cu ajutorul coordonatei curbilinii *s*, luată de-a lungul liniei de curent.

În curgerea staționară liniile de curent nu se intersectează. Astfel, liniile de curent, în cazul fluidului ideal, pot materializa pereții unui tub, prin care curge un fluid. De aceea liniile de curent care trec prin toate punctele unui contur închis formează un *tub de curent* (fig. 9.31).

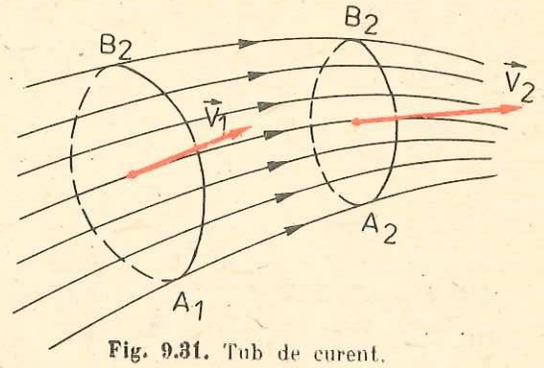


Fig. 9.31. Tub de curent.

9.4.2. **Ecuația de continuitate.** *Cantitatea de fluid care străbate o anumită arie în unitatea de timp reprezintă debitul de fluid prin acea arie.* Debitul poate fi de masă sau de volum, după cum cantitatea de fluid reprezintă o masă sau un volum de fluid.

Debitul de masă se exprimă prin relația:

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t},$$

unde Δm este masa de fluid care străbate o anumită arie în timpul Δt. Iar debitul de volum este dat de relația:

$$Q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

unde ΔV este volumul de fluid care străbate o anumită arie în intervalul de timp Δt.

Să considerăm un fluid în curgere staționară și din acesta să separăm un tub de curent (fig. 9.32). Debitul de volum prin ariile S_1 și S_2 are valorile:

$$Q_1 = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = S_1 v_1;\ Q_2 = S_2 v_2.$$

Fluidul fiind incompresibil, ariile S_1 și S_2 sînt străbătute de aceeași cantitate de fluid în unitatea de timp, deci:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \tag{9.15}$$

Relația (9.15) se numește *ecuația de continuitate.*

9.4.3. **Legea lui Bernoulli.** Această lege se aplică curgerii staționare a unui fluid ideal. Reamintim că un fluid ideal are următoarele caracteristici: *a)* nu are viscozitate; *b)* este incompresibil; *c)* viteza unei particule de fluid este independentă de timp.

Considerăm un tub de curent cu secțiunea variabilă. Vom studia curgerea fluidului cuprins între secțiunile S_1 și S_2 din tubul de curent (fig. 9.32).

Ca urmare a incompresibilității fluidului, volumul V_1 de fluid care traversează secțiunea S_1 în intervalul de timp Δt este egal cu volumul V_2 de fluid care traversează secțiunea S_2 în același interval de timp.

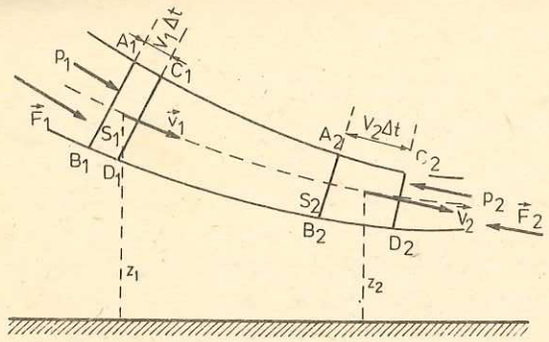


Fig. 9.32. Debitul de-a lungul unui tub de curent de fluid ideal în regim permanent este constant: $S_1v_1 = S_2v_2$.

De-a lungul liniei de curent $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz =$ = constant.

Înmulțind relația (9.15) cu Δt obținem:

$$S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t,$$

sau $S_1 \cdot A_1C_1 = S_2 \cdot A_2C_2$,

de unde rezultă că

$$V_1 = V_2 = V.$$

Totul se petrece ca și cum în intervalul de timp Δt s-ar transfera direct din poziția $A_1B_1C_1D_1$ o masă de fluid $m = \rho V$, în poziția $A_2B_2C_2D_2$, fără ca lichidul intermediar să se fi mișcat.

Masa de fluid m are la traversarea secțiunii S_1 energia cinetică $\frac{1}{2}\,mv_1^2$, iar la traversarea secțiunii S_2 are energia cinetică $\frac{1}{2}\,mv_2^2$. Variația energiei cinetice a masei m, în intervalul de timp în care a fost transferată din poziția $A_1B_1C_1D_1$ în poziția $A_2B_2C_2D_2$, este:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\,m(v_2^2 - v_1^2) \tag{9.16}$$

și ea trebuie să fie egală cu lucrul mecanic al forțelor ce se exercită asupra sistemului considerat în intervalul de timp Δt. Aceste forțe sînt forțele de presiune $F_1 = p_1S_1, F_2 = p_2S_2$ care acționează asupra lichidului cuprins între secțiunile S_1 și S_2 și greutatea mg a lichidului transferat.

În intervalul de timp Δt în care masa m traversează secțiunea S_1 sub acțiunea forței $\vec{F}_1$ al cărei punct de aplicație se deplasează pe distanța A_1C_1, se efectuează următorul lucru mecanic motor:

$$L_1 = F_1 \cdot A_1C_1 = p_1S_1 \cdot A_1C_1 = p_1V = p_1\frac{m}{\rho}.$$

În același interval de timp forța $F_2 = p_2S_2$ care se exercită perpendicular pe secțiunea S_2 efectuează următorul lucru mecanic rezistent:

$$L_2 = -F_2 \cdot C_2A_2 = -p_2V = -p_2\frac{m}{\rho}.$$

Lucrul mecanic al greutății masei de lichid transferate este:

$$L_3 = -mg\,(z_2 - z_1).$$

Egalînd variația energiei cinetice a masei m cu lucrul mecanic rezultant al forțelor ce se exercită asupra acestei mase, obținem:

$$(p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} + mg(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\,m(v_2^2 - v_1^2), \tag{9.17}$$

sau

$$p_1 + \rho gz_1 + \frac{1}{2}\,\rho v_1^2 = p_2 + \rho gz_2 + \frac{1}{2}\,\rho v_2^2. \tag{9.18}$$

Aceasta este ecuația lui Bernoulli (1700—1782). Ecuația lui Bernoulli se mai scrie și astfel

$$p + \frac{1}{2}\,\rho v^2 + \rho gz = \text{constant} = C. \tag{9.19}$$

Constanta C este aceeași de-a lungul liniei de curent și este independentă de timp. Termenii din relația (9.19) au toți dimensiunile unei presiuni. Pentru a-i distinge, în enunțuri se utilizează denumirile: „presiunea statică" pentru p, „presiunea dinamică" pentru (1/2) ρv^2, „presiunea de poziție" pentru ρgz, termen datorat energiei potențiale.

În cazul acțiunii fluidului asupra unui perete, pe un element de suprafață ΔS al peretelui se va exercita o forță de presiune $p\Delta S$, unde p se scoate din relația (9.19).

În cazul particular cînd tubul de curent este practic orizontal sau cînd energia potențială este neglijabilă, obținem:

$$p + \frac{1}{2}\,\rho v^2 = C. \tag{9.20}$$

9.4.4. **Aplicații ale legii lui Bernoulli.** Să considerăm un fluid care curge printr-o conductă cu secțiunea variabilă. În porțiunile înguste ale conductei prin care curge fluidul viteza acestuia crește; conform legii lui Bernoulli (9.20) crește și presiunea dinamică, de aceea trebuie să scadă presiunea statică, pentru ca suma lor să rămînă constantă. Presiunea statică la gîtuitură poate scădea sub presiunea atmosferică, astfel apare fenomenul de aspirație (fig. 9.33) pe care se bazează unele aplicații practice, cum ar fi pulverizatorul (fig. 9.34),

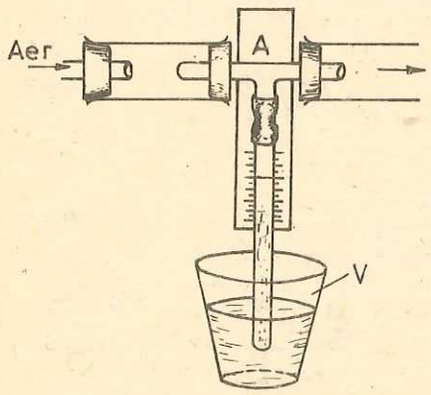


Fig. 9.33. Presiunea statică în porțiunea îngustă A a unei conducte poate să scadă sub valoarea presiunii atmosferice și provoacă aspirarea lichidului din vasul V.

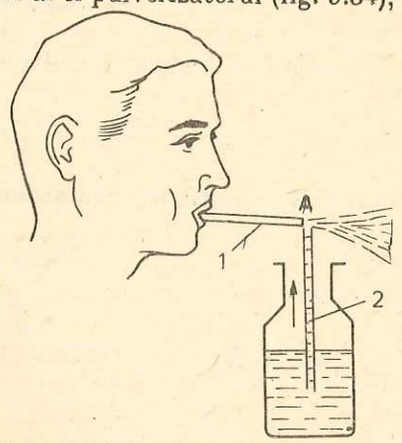


Fig. 9.34. Pulverizatorul. Datorită aerului suflat prin tubul *1*, în punctul *A* crește presiunea dinamică și scade presiunea statică sub valoarea presiunii atmosferice. Datorită acestui fapt lichidul urcă în tubul *2* pînă în *A* unde curentul de aer îl preface în picături fine.

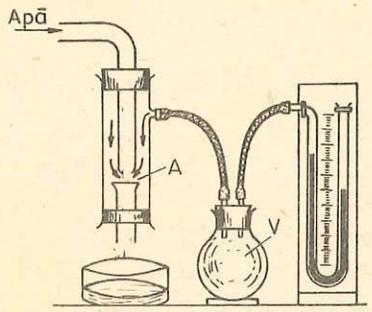


Fig. 9.35. Trompa de apă.

lampa Bunsen, trompa de apă, sonda de presiune, debitmetrele etc.

a) *Trompa de apă* (fig. 9.35) funcționează astfel: în regiunea A presiunea dinamică crește, scade presiunea statică și ia naștere absorbția aerului din vasul V, aer care este antrenat de jetul de apă.

b) *Sonda de presiune* este un tub manometric montat perpendicular pe o conductă prin care curge un fluid și care servește la determinarea presiunii statice a fluidului (fig. 9.36).

c) *Tubul Venturi* se folosește la măsurarea debitelor de volum ale fluidelor (fig. 9.37). Pentru măsurarea debitelor se înlocuiește o porțiune orizontală de conductă cu tubul Venturi cu secțiunea de intrare S_1 și secțiunea porțiunii mai înguste S_2. În secțiunile S_1 și S_2 vitezele fluidului sînt v_1 și v_2. Aplicînd relația (9.20), se obține

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2},$$

de unde

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)\rho. \qquad (9.21)$$

Folosind în relația (9.21) ecuația de continuitate (9.15), obținem:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2.$$

Debitul de volum este dat de relația:

$$Q_V = S_1 v_1 = S_1 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho[(S_1/S_2)^2 - 1]}} = k\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \qquad (9.22)$$

unde k este constanta aparatului

$$k = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2}}. \qquad (9.23)$$

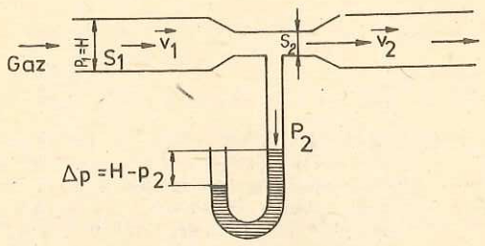


Fig. 9.36. Sonda de presiune.

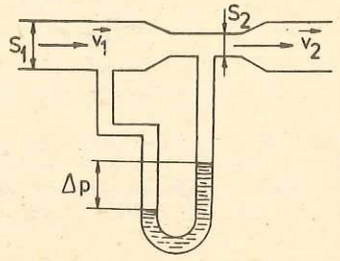


Fig. 9.37. Tubul Venturi.

9.4.5. **Viscozitatea.** La viteze nu prea mari, curgerea fluidelor este laminară (în straturi), adică liniile de curent sînt bine determinate și nu se intersectează nicăieri între ele, fiecare particulă de fluid rămîne mereu în interiorul unui același tub de curent. La viteze mari, mișcarea devine turbulentă, neregulată, porțiunile de fluid se amestecă și se formează vîrtejuri.

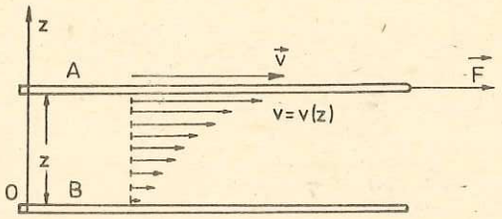


Fig. 9.38. Antrenarea straturilor de lichid vecine datorită viscozității.

Să ne imaginăm două suprafețe solide plane A și B așezate la o anumită distanță una de alta într-un fluid vîscos în repaus (fig. 9.38). Acționăm cu o forță $\vec{F}$ asupra suprafeței A deplasînd-o cu o viteză $\vec{v}$ constantă în raport cu suprafața B. În timp ce suprafața A se deplasează în propriul său plan, suprafața B are tendința să se deplaseze în aceeași direcție. Ne putem închipui că în interiorul lichidului deci și între cele două suprafețe plane există mai multe straturi paralele care alunecă unele față de altele, între care apar forțe de frecare internă sau de viscozitate. Stratul care se află în contact cu suprafața mobilă are aceeași viteză ca și aceasta, în timp ce lichidul în contact cu cealaltă suprafață se află în repaus. Viteza straturilor intermediare crește uniform de la o suprafață la alta, așa cum arată figura 9.38. Stratul cu viteză mai mare caută să accelereze stratul cu viteză mai mică peste care el alunecă, și invers stratul cu viteză mai mică caută să frîneze stratul cu viteză mai mare cu care este în contact. Astfel, ia naștere forța de frecare $\vec{F}' = -\vec{F}$, care acționează în planurile de lunecare, a căror viteză de curgere variază de la un strat la altul.

Dacă grosimea z a stratului de fluid dintre cele două suprafețe crește, aplicînd aceeași forță $\vec{F}$ suprafeței A, aceasta va căpăta o viteză mai mare: $v \sim z$. Dacă se mărește aria S a suprafeței A se constată o micșorare a vitezei plăcii, cînd este acționată de aceeași forță: $v \sim 1/S$. O creștere a modulului forței $\vec{F}$ produce o creștere proporțională a vitezei v : $v \sim F$. Astfel viteza este proporțională cu forța F, cu distanța z și cu $1/S$. Putem scrie următoarea relație:

$$v = \frac{Fz}{\eta S},$$

sau

$$\eta = \frac{Fz}{Sv}, \qquad (9.24)$$

unde η este un factor care depinde numai de natura fluidului și de temperatura sa. Acesta se numește coeficientul de viscozitate al fluidului.

Unitatea de măsură pentru coeficientul de viscozitate în SI se numește decapoise, după numele fizicianului Poiseuille.

Avînd în vedere relația (9.24) obținem:

$$1 \text{ decapoise} = 1 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2.$$

9.4.6. **Forța de rezistență la înaintarea în fluide.** Din experiența noastră ca cicliști, motocicliști, sau ca pasageri în diverse vehicule, am constatat că aerul tinde să se opună mișcării corpurilor.

Mișcarea unui corp într-un fluid face să apară o *forță de rezistență*, care este întotdeauna opusă mișcării.

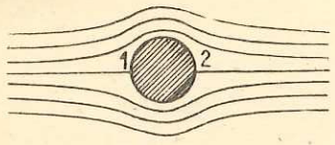


Fig. 9.39. Liniile de curent în jurul unei sfere într-o curgere laminară.

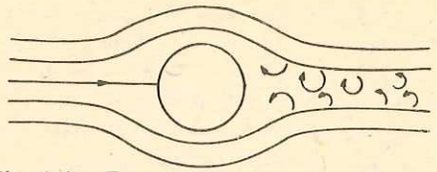


Fig. 9.40. Formarea turbioanelor în spatele unui cilindru de revoluție într-o curgere laminară.

Să considerăm cazul unui corp care posedă o axă de simetrie și care se deplasează în aer cu o viteză constantă care are aceeași direcție ca și axa de simetrie a corpului. Rezistența pe care o opune aerul mișcării corpului se datorează forțelor de frecare și forțelor de presiune. Distingem cazurile următoare:

a) Dacă mobilul se deplasează în aer cu o viteză pînă la 0,5 m/s, perturbațiile datorate forțelor de presiune sînt neglijabile. Mișcarea este perturbată de forțele de frecare.

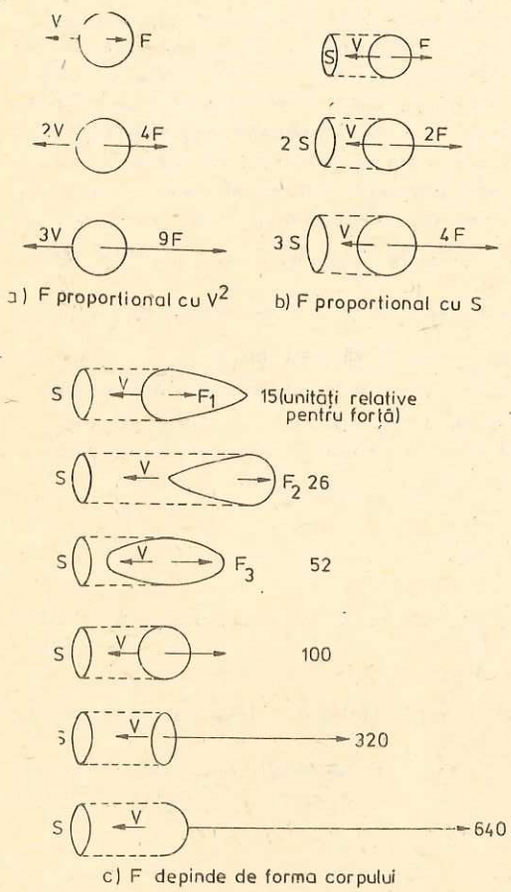


Fig. 9.41. Forța de rezistență a obiectelor aflate într-un lichid în mișcare este proporțională cu: *a)* pătratul vitezei fluidului; *b)* cu secțiunea transversală S a corpului. Depinde, de asemenea, de forma corpului (*c*) și de densitatea fluidului.

Forțele de frecare se datorează viscozității aerului. Acestea sînt tangente la suprafața corpului și admit o rezultantă care are ca dreaptă suport, axa de simetrie a mobilului, numită *rezistență de frecare*. În acest caz, rezistența este proporțională cu viteza. Fluidul alunecă în lungul pereților corpului și curgerea lui se numește *laminară* (fig. 9.39).

b) Dacă mobilul se deplasează cu o viteză cuprinsă între 1 m/s și 280 m/s, rezistența de frecare (datorată viscozității aerului) este mică în raport cu rezistența datorată forțelor de presiune. La aceste viteze, se produce în fața mobilului o zonă de suprapresiune și în spatele mobilului o zonă de depresiune, care dă naștere turbioanelor (fig. 9.40). În acest caz rezistența se datorează diferenței dintre forțele de presiune din fața și din spatele mobilului.

Studii experimentale, în tunele aerodinamice, au condus la concluzia că rezistența de înaintare în aer este proporțională cu:

— pătratul vitezei mobilului (fig. 9.41, *a*);

— densitatea aerului ρ, în condițiile experimentului;

— aria S a suprafeței obținută prin proiectarea corpului pe un plan perpendicular pe vectorul viteză, numită contur aparent (fig. 9.41, *b*).

Rezistența mai depinde de forma corpului.

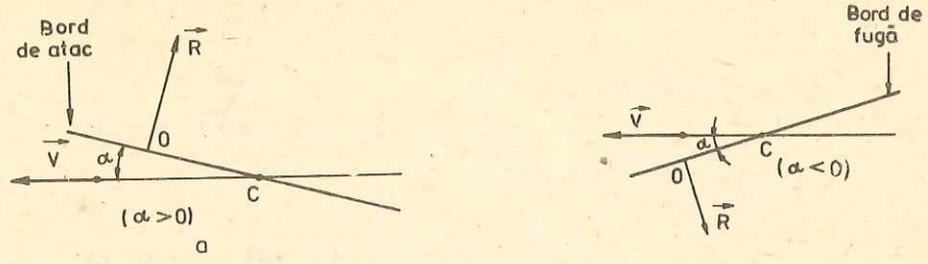


Fig. 9.42. *a)* Unghiul de atac al unei plăci plane; *b)* bordul de fugă al unei plăci plane.

Mărimea forței de rezistență este dată de relația următoare:

$$F = \frac{1}{2} CS\rho v^2. \tag{9.25}$$

Factorul 1/2 este introdus din considerente teoretice. Coeficientul de proporționalitate C, este o constantă adimensională. Acest coeficient depinde de forma corpului și se mai numește și coeficient de formă în regim turbulent.

9.4.7. **Zborul avionului.** Să considerăm aripa unui avion de forma unei plăci plane dreptunghiulare, care se mișcă într-o atmosferă calmă cu viteza v. Fie α unghiul pe care-l face placa cu vectorul viteză v (fig. 9.42). Unghiul α se numește *unghi de atac*. Partea frontală a plăcii se numește bord de atac, iar partea diametral opusă se numește bord de fugă (fig. 9.42). Experiența arată că asupra plăcii acționează un sistem de forțe care admit o rezultantă R. Aceasta satisface următoarele condiții:

— are punctul de aplicație O, la o treime de bordul de atac;

— are direcția normală la placă;

— are un astfel de sens încît tinde să mărească unghiul α;

— intensitatea forței $\vec{R}$ este proporțională cu densitatea aerului, suprafața plăcii, unghiul de atac și pătratul vitezei:

$$R = C\rho\alpha S v^2. \tag{9.26}$$

Această formulă este valabilă pentru unghiuri mici de atac și pentru viteze care nu depășesc 300 km/h.

Proiectăm forța $\vec{R}$ pe o axă paralelă cu viteza și pe o axă perpendiculară pe viteză (fig. 9.43).

Componenta $P = R \cos \alpha$ se numește *portanța aripei* (sau forță portantă) care învinge greutatea avionului. Componenta $T = R \sin \alpha$ se numește *rezistența frontală* și trebuie învinsă de către forța de tracțiune a avionului.

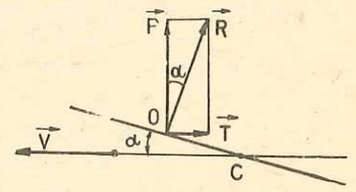


Fig. 9.43. Forța portantă.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Un rezervor cu apă este prevăzut cu un orificiu de secțiune S_2 foarte mică în raport cu secțiunea S_1 a rezervorului. Orificiul este construit astfel încît ghidează curgerea. Să se calculeze viteza de curgere a apei prin orificiu, neglijînd frecarea (fig. 9.44, *a* și *b*). Nivelul apei din rezervor se menține constant la valoarea $h = 1{,}8$ m($g = 10$ m/s²).

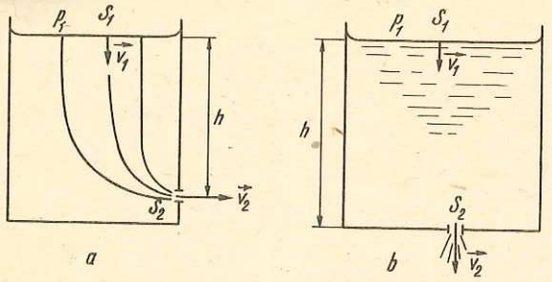


Fig. 9.44. *a* şi *b*. La problema rezolvată.

Rezolvare. Notăm cu p_0 presiunea atmosferică, cu v_1 viteza lichidului la nivelul său superior şi cu v_2 viteza lichidului la nivelul orificiului. Mişcării fluidului (presupus ideal), i se aplică legea lui Bernoulli:

$$p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Ţinînd seamă de ecuaţia de continuitate: $S_1 v_1 = S_2 v_2$, obţinem:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}}.$$

Cum secţiunea S_2 este foarte mică în raport cu S_1, avem:

$$v_2 = \sqrt{2gh} = 6 \text{ m/s}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. Un balon de cauciuc umflat cu hidrogen urcă în aerul atmosferic. Acest fapt poate fi o probă a existenţei forţelor de presiune datorate aerului atmosferic? Justificaţi răspunsul.

R: da.

2. Un pahar umplut cu apă pînă la refuz este acoperit cu o foaie de hîrtie. Se întoarce paharul cu gura în jos acoperind în acest timp foaia cu podul palmei. Foaia rămîne lipită de gura paharului şi apa nu curge (fig. 9.45). Este aceasta o probă a existenţei presiunii atmosferice?

R: da.

Fig. 9.45. Pentru exerciţiul 2.

3. Se cufundă un corp într-un vas cu apă, astfel încît sub corp mai rămîne un strat foarte subţire de apă. Să va exercita, în acest caz, o presiune hidrostatică orientată de jos în sus? Justificaţi răspunsul.

R: da.

4. Dacă o persoană se aşază în apropierea unui tren care se deplasează cu o viteză oarecare, există riscul ca persoana să cadă sub tren?

R: da.

5. Un remorcher trage două şlepuri (fig. 9.46). Explicaţi de ce cele două şlepuri au tendinţa să se apropie.

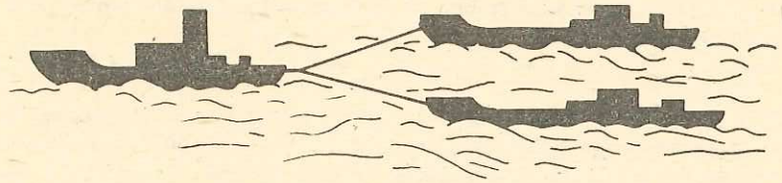


Fig. 9.46. Pentru exerciţiul 5.

6. Două mingi de cauciuc se suspendă aşa cum se arată în figura 9.47. Dacă între cele două mingi se suflă aer, acestea se vor apropia. Explicaţi fenomenul.

7. Se realizează dispozitivul din figura 9.48 alcătuit dintr-un disc uşor A făcut din carton şi aşezat în apropierea unui alt disc B prevăzut cu un orificiu pus în legătură cu un tub C. Dacă se suflă aer prin tubul C, discul A se apropie de discul B. De ce?

8. Un manometru cu lichid se compune dintr-un tub în formă de U care are o ramură deschisă iar cealaltă este legată la un recipient care conţine un gaz sub o anumită presiune. Tubul se poate umple cu mercur ($\rho_1 = 13{,}6$ g/cm³), apă ($\rho_2 = 1$ g/cm³) sau cu ulei ($\rho_3 = 0{,}6$ g/cm³). Să se discute avantajele şi dezavantajele utilizării fiecărui lichid. În ce condiţii, fiecare dintre cele trei lichide, va fi mai util?

9. Un tub Torricelli are o lungime $l = 1$ m. Se înclină pînă cînd se umple complet cu mercur. În acest moment el face un unghi $\alpha = 49°10'$ cu nivelul liber al mercurului din cuvă. Să se determine presiunea atmosferică în acest loc.

R: $H = \rho g l \sin \alpha = 756{,}6$ mm col. Hg.

10. O bucată de lemn cu densitatea $\rho_1 = 700$ kg/m³ şi cu masa $m_1 = 0{,}250$ kg, este prinsă de o bucată de plumb. Corpul format se introduce în apă ($\rho = 1\,000$ kg/m³). Să se calculeze greutatea plumbului pentru ca:
a) corpul format să plutească în echilibru în apă;
b) numai $f = 8/10$ din volumul total să fie cufundat în apă. Densitatea plumbului este $\rho_2 = 11\,350$ kg/m³, iar $g = 10$ m/s².

R: $(m_1 + m_2)g = \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right) f \rho g$: *a)* $G_1 = 1{,}18$ N; *b)* $G_2 = 0{,}38$ N.

11. Densitatea apei de mare este de 1,026 g/cm³. Care este presiunea datorată apei de mare la o adîncime de 1 km?

R: $p = \rho g\ h = 10{,}055 \cdot 10^6$ N/m².

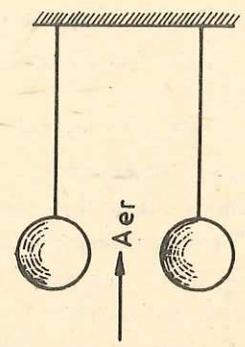


Fig. 9.47. Pentru exerciţiul 6.

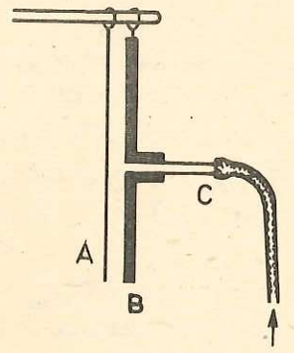


Fig. 9.48. Pentru exerciţiul 7.

12. Pistonul mic al unei prese hidraulice are un diametru $d_1 = 1$ cm și este supus acțiunii unei forțe $F_1 = 10$ N. Care trebuie să fie diametrul pistonului mare d_2 pentru a suporta o sarcină $F_2 = 10\,000$ N?

R: $d_2 = d_1\sqrt{F_2/F_1} = 31{,}6$ cm.

13. Un corp din fontă cu masa $m = 20$ kg și densitatea $\rho = 7\,500$ kg/m³ poate să plutească pe suprafața mercurului de densitate $\rho_1 = 13\,600$ kg/m³. Calculați volumul porțiunii din corp cufundate în mercur și volumul total al corpului.

R: $V_1 = m/\rho_1 = 1\,470$ cm³; $V = 2\,667$ cm³.

14. O sferă din aluminiu are greutatea în aer $G = 2{,}58$ N. Greutatea sa aparentă în apă nu este decît $G_a = 1$ N. Demonstrați că sfera este goală în interior și calculați volumul cavității. Densitatea aluminiului $\rho = 2\,580$ kg/m³ ($g = 10$ m/s²).

R: $G_a = G - (V_1 + G/\rho g)\cdot\rho_0 g$; $V_1 = 58$ cm³.

15. Masa unui vapor este $m = 57\,800$ tone. Să se calculeze volumul părții cufundate în apă de mare cu densitatea $\rho_1 = 1\,028$ kg/m³, și apoi în apă dulce cu densitatea $\rho_2 = 1\,000$ kg/m³.

R: $V_1 = m/\rho_1 = 56\,226$ m³; $V_2 = m/\rho_2 = 57\,800$ m³

16. Un tub Torricelli este înclinat cu $\alpha = 45°$. Cu cît se deplasează mercurul în tub, cînd presiunea atmosferică variază de la $H_1 = 758$ la $H_2 = 764$ mm coloană de mercur?

R: $\Delta h = (\Delta H)/\rho g \cos\alpha = 8{,}5$ mm.

17. Printr-o conductă orizontală, cu secțiunea transversală variabilă, curge apă (fig. 9.49). Să se determine debitul de volum al apei ce curge prin conductă. Se dau secțiunile transversale $S_1 = 10^{-3}$ m², $S_2 = 2\cdot10^{-3}$ m² și diferența de nivel dintre coloanele de lichid din sondele de presiune montate pe conductă $\Delta h = 0{,}2$m.

R: $Q_V = S_1 S_2 \sqrt{2g\,\Delta h/(S_2^2 - S_1^2)} = 2{,}29\cdot10^{-3}$ m³/s.

18. Să se afle cu ce viteză scade nivelul apei dintr-un rezervor cu aria secțiunii transversale $S_1 = 1$ m², dacă viteza de curgere a apei printr-un orificiu, făcut în peretele lateral al rezervorului, este $v = 2$ m/s. Diametrul orificiului este de $d = 2$ cm.

R: $v_1 = \pi d^2 v/4\,S_1 = 6{,}28\cdot10^{-4}$ m/s.

19. Să se determine viteza de curgere a bioxidului de carbon printr-o conductă, dacă prin secțiunea transversală a conductei se scurge în timpul $t = 30$ minute o masă $m = 0{,}51$ kg. Densitatea gazului este $\rho = 7{,}5$ kg/m³ și diametrul conductei este $d = 2$ cm.

R: $v = 4\,m/\rho\,\pi d^2 t = 0{,}12$ m/s

20. Apa se scurge dintr-un tub cu diametrul interior $d = 2$ cm cu debitul de volum $Q_V = 8$ litri/min. Să se determine viteza apei în tub.

R: $v = 4\,Q_V/\pi\,d^2 = 42{,}4$ cm/s.

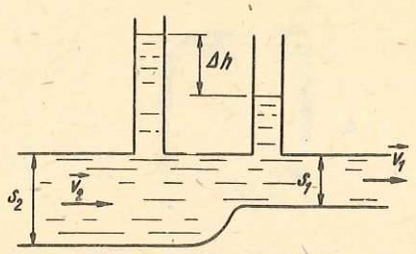


Fig. 9.49. La problema 17.

21. Un lichid cu densitatea $\rho = 900$ kg/m³, curge printr-o conductă cu diametrul $d = 6$ cm. Într-o secțiune unde diametrul scade la $d_1 = 4{,}2$ cm, presiunea este cu 1 600 N/m² mai mică decît presiunea din cealaltă secțiune a conductei. Să se calculeze viteza lichidului în secțiunea conductei de diametru d.

R: $v = \sqrt{(2\,\Delta p)/\rho[(d/d_1)^4 - 1]} = 1{,}1$ m/s.

10

UNDE ELASTICE. NOȚIUNI DE ACUSTICĂ

10.1 OSCILATORUL LINIAR ARMONIC. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR

10.1.1. Mișcarea oscilatorie

EXPERIMENTE

1. De un fir lung și inextensibil, suspendăm un corp (bilă) pe care-l lovim astfel încît să nu-i imprimăm o deviație prea mare față de poziția de repaus (fig. 10.1, *a*). Un astfel de sistem mecanic este numit *pendul gravitațional.*

2. De un resort de oțel, suspendăm un corp și prin intermediul lui tragem resortul în jos (fig. 10.1, *b*). Sistemul începe să se miște în sus și în jos. Un astfel de sistem este numit *pendul elastic.*

3. Fixăm o bandă de oțel la unul din capete și apoi o deviem din poziția inițială ca în figura 10.1, *c*. Sistemul se numește *pendul cu arc lamelar.*

4. Turnăm apă într-un tub îndoit, din sticlă, cu diametrul de cîțiva cm. Astupăm unul dintre capete cu un dop de plută și suflăm aer la celălalt capăt. În acest fel coloana de apă este pusă în mișcare (fig. 10.1, *d*).

5. Pe marginea unui disc fixăm într-o poziție oarecare o bilă. Rotim discul cu viteză unghiulară constantă. Cu ajutorul unei lămpi de proiecție, proiectăm pe un ecran mișcarea bilei de pe disc (fig. 10.1, *e*). Vom constata că umbra bilei are o mișcare alternativă, dus-întors.

În toate cazurile studiate mai sus are loc o mișcare continuă de o parte și de alta (dus-întors) a poziției inițiale (de repaus) a corpului (sau a umbrei sale în cazul experimentului 5).

Această mișcare prezintă următoarele caracteristici:

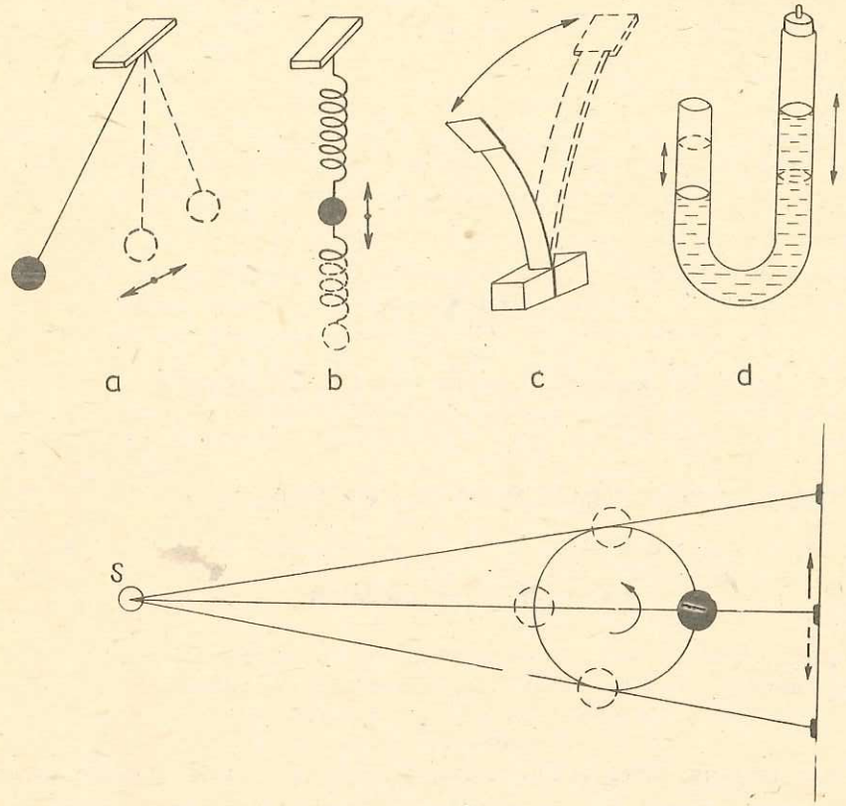


Fig. 10.1. Exemple de oscilatori: *a)* pendul gravitațional; *b)* pendul elastic; *c)* pendul cu arc lamelar; *d)* coloană de apă oscilantă; *e)* proiecția pe un ecran a unei mișcări circulare uniforme.

a) după intervale de timp egale, procesul individual de mișcare, se repetă, este un proces periodic;

b) mișcarea are loc de fiecare dată simetric față de o anumită poziție, poziția de repaus sau de echilibru a oscilatorului.

Mișcarea unui corp sau a unui sistem material, care se repetă la intervale de timp egale și care se face simetric față de o poziție de repaus se numește mișcare oscilatorie sau oscilație mecanică.

Pentru studiul mișcării oscilatorii se definesc următoarele mărimi fizice:

Perioada mișcării oscilatorii T, reprezintă timpul necesar efectuării unei oscilații complete.

Dacă notăm cu n numărul de oscilații efectuate de un oscilator în intervalul de timp t atunci avem:

$$T = \frac{t}{n}.$$

Unitatea de măsură în S.I. este:

$$[T]_{SI} = 1\text{s}.$$

Frecvența mișcării ν *este numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp:*

$$\nu = \frac{n}{t}.$$

Unitatea de măsură pentru frecvență în S.I. este hertzul (Hz):

$$[\nu]_{SI} = 1\ \text{s}^{-1} = 1\ \text{Hz}.$$

Din relațiile de definiție ale frecvenței și perioadei rezultă relația:

$$\nu T = 1.$$

Elongația mișcării notată cu x sau y reprezintă deplasarea (depărtarea) oscilatorului față de poziția de repaus la un moment dat.

Din definiția elongației rezultă că ea variază în timp. Această mărime are o valoare, o direcție și un sens, deci poate fi reprezentată printr-un vector $\vec{x}$ sau $\vec{y}$. În S.I. unitatea de măsură pentru elongație este metrul:

$$[x]_{SI} = 1\ \text{m}.$$

Amplitudinea mișcării A *este elongația maximă* x_{max} *pe care o poate avea oscilatorul în cursul oscilației.*

Dacă în experimentele anterioare 1, 2, 3, 4, se lasă sistemele (corpurile) să oscileze un interval de timp mai mare, se observă că amplitudinea mișcării oscilatorii nu rămîne constantă în timp. În experimentul 5, însă, amplitudinea mișcării (a proiecției mișcării) rămîne neschimbată. Distingem deci două cazuri:

a) *mișcarea oscilatorie (oscilația) este neamortizată*, amplitudinea rămîne neschimbată de la o oscilație la alta;

b) *mișcarea oscilatorie (oscilația) este amortizată*, amplitudinea scade de la o oscilație la alta.

10.1.2. **Oscilatorul liniar armonic.** Să analizăm un resort elastic care are lungimea l în stare nedeformată (fig. 10.2, *a*). După legea lui Hooke deformarea unui resort elastic este proporțională cu forța care acționează asupra resortului. Forța elastică care ia naștere în resort este, de asemenea, proporțională cu deformarea resortului dar de sens opus acesteia. Avem, deci:

$$\vec{F}_e = -k\vec{y} \quad \text{sau} \quad F_e = -ky,$$

unde sînt considerate pozitive valorile citite începînd de la punctul cel mai de jos al resortului netensionat, în jos.

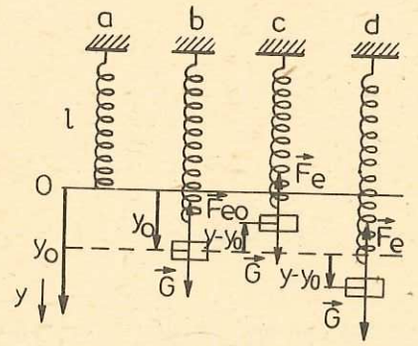


Fig. 10.2. Oscilator armonic liniar.

Dacă se suspendă de resort un corp cu masa m, el se va alungi cu y_0 datorită forţei $\vec{G} = m\vec{g}$ (fig. 10.2, *b*) şi de aici rezultă:

$$\vec{G} = m\vec{g} = k\vec{y}_0 = -\vec{F}_{e0} \tag{10.1}$$

relaţie valabilă pentru poziţia de repaus a pendulului elastic.

Scoţînd pendulul din poziţia de repaus el începe să oscileze vertical, forţa $\vec{G}$ îndreptată în jos îşi păstrează valoarea, în timp ce forţa elastică $\vec{F}_e$ din resort variază în funcţie de alungirea y a acestuia (fig. 10.2, *c,d*). Suma vectorială a celor două forţe sau diferenţa valorilor lor dă ca rezultantă forţa care la orice moment tinde să aducă pendulul spre poziţia de repaus. Se obţine pentru această forţă expresia :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{G} = -k\vec{y} + k\vec{y}_0 = -k(\vec{y} - \vec{y}_0)$$

sau

$$F = -k(y - y_0). \tag{10.2}$$

Aşadar forţa care acţionează asupra pendulului elastic în timpul oscilaţiei este proporţională cu deplasarea (depărtarea) faţă de poziţia de repaus, şi de sens contrar acesteia adică este o forţă de tip elastic.

Un punct material care se mişcă rectiliniu sub acţiunea unei forţe de forma $F = -ky$ (sau $F = -kx$) se numeşte oscilator liniar armonic. Mişcarea sa de oscilaţie este numită mişcare oscilatorie armonică.

Oscilatorul liniar armonic este un oscilator ideal.

Pentru a stabili legea mişcării oscilatorului armonic, dependenţa elongaţiei y de timp, $y = y(t)$, ne vom folosi de mişcarea circulară uniformă a unui punct material şi de proiecţia acestei mişcări pe unul din diametrele traiectoriei.

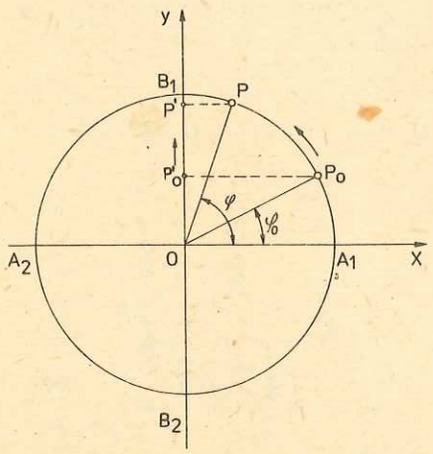


Fig. 10.3. Proiecţia ortogonală a mişcării circulare uniforme a punctului P pe unul din diametrele traiectoriei (B_1B_2).

Să urmărim, în acelaşi timp, mişcarea circulară uniformă cu viteza unghiulară ω, pe un cerc de rază $R = A$, a unui punct material P de masă m şi mişcarea proiecţiei sale P', proiecţie ortogonală pe axa Oy (diametrul B_1B_2, în figura 10.3). În timp ce P face o rotaţie completă plecînd din A_1 în sensul indicat pe figură, proiecţia sa P' efectuează o oscilaţie cu amplitudine constantă A, plecînd din O aşa cum arată figura 10.4. Se observă următoarele: componenta pe axa y a deplasării lui P este totdeauna aceeaşi cu deplasarea lui P'; componenta pe axa y a vitezei lui P este totdeauna aceeaşi cu viteza lui P'; componenta pe axa y a acceleraţiei lui P este totdeauna aceeaşi cu acceleraţia lui P'. Deci mişcarea oscilatorie a punctului P' poate fi descrisă ca proiecţia pe diametrul Oy a mişcării circulare uniforme a punctului P. Să arătăm că această mişcare oscilatorie este o mişcare oscilatorie armonică.

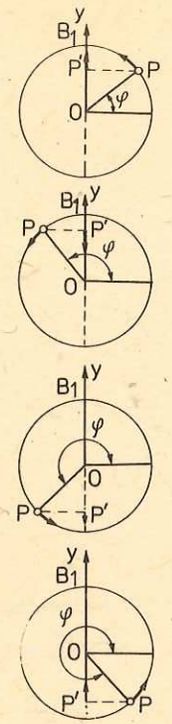
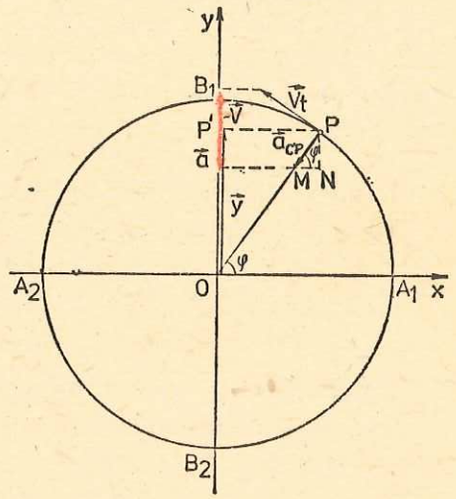


Fig. 10.4. Mişcarea concomitentă a punctului P şi a proiecţiei sale P'.

Fig. 10.5. Mişcarea oscilatorie a punctului P' poate fi descrisă ca proiecţia pe diametrul B_1B_2 a mişcării circulare a punctului P.



Se ştie că în mişcarea circulară uniformă acceleraţia centripetă $\vec{a}_{cp}$ are valoarea $\omega^2 R$. Componenta sa pe diametrul B_1B_2 (fig. 10.5) reprezintă acceleraţia mişcării punctului P' şi are valoarea :

$$a = -\omega^2 R \sin \varphi. \tag{10.3}$$

Din figura 10.5 se observă că putem scrie:

$$y = R \sin \varphi. \tag{10.4}$$

În acest caz relaţia (10.3) devine:

$$a = -\omega^2 y \quad \text{sau} \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{y} \tag{10.5}$$

unde semnul minus semnifică faptul că acceleraţia $\vec{a}$ şi elongaţia $\vec{y}$ au sensuri opuse.

Punctul P' se mişcă la fel ca şi cînd ar fi un punct material de masă m şi asupra lui ar acţiona o forţă F care să-i imprime acceleraţia dată de (10.5).

Deci:

$$F = ma = -m\omega^2 y. \tag{10.6}$$

Pentru valori determinate ale masei m și ale vitezei unghiulare constante ω, produsul $m\omega^2 = k$ și relația (10.6) devine:

$$F = -ky. \tag{10.6'}$$

Așadar mișcarea punctului P' se face ca și în cazul în care forța sub acțiunea căreia are loc mișcarea este o forță de tip elastic și deci acest punct material descrie o mișcare oscilatorie armonică.

Știind că $\varphi = \omega t$ și că $R = A$ este amplitudinea mișcării oscilatorii, relația (10.4) devine:

$$y = A \sin \omega t. \tag{10.7}$$

Această relație reprezintă ecuația elongației oscilatorului liniar armonic, adică reprezintă legea de mișcare a oscilatorului, dependența $y = y(t)$.

Dacă proiecția mișcării punctului P se face pe diametrul A_1A_2 atunci se obține pentru ecuația elongației expresia:

$$x = A \cos \omega t.$$

Putem formula acum o altă definiție a mișcării oscilatorii armonice:

orice punct material care se mișcă rectiliniu, față de un SR, astfel încît legea de mișcare este de forma

$$y = A \sin \omega t \text{ sau } x = A \cos \omega t,$$

descrie o mișcare oscilatorie armonică.

Ținînd seama de relația (10.7) și de relația (10.5) expresia accelerației devine acum:

$$a = -\omega^2 A \sin \omega t. \tag{10.5'}$$

Componenta vitezei liniare $v_l = \omega A$, pe diametrul B_1B_2 reprezintă viteza de mișcare a lui P', adică viteza mișcării oscilatorii armonice:

$$v = \omega A \cos \omega t. \tag{10.8}$$

Faza și perioada mișcării oscilatorii armonice. Argumentul funcției $y = A \sin \omega t$, $\varphi = \omega t$, se numește faza mișcării oscilatorii. Faza se măsoară în radiani și este una dintre mărimile de stare ale oscilatorului. Dacă în figura 10.3 oscilatorul P' ar fi fost la momentul inițial în P_0' (corespunzător punctului P_0 de pe cerc) faza la momentul $t_0 = 0$ ar fi fost φ_0. Atunci, la momentul t faza este $\varphi = \varphi_0 + \omega t$. Ecuația elongației se va scrie în acest caz:

$$y = A \sin (\omega t + \varphi_0). \tag{10.9}$$

Pentru mișcarea oscilatorie mărimea ω se numește pulsație și reprezintă viteza de variație a fazei. Această mărime se măsoară în S.I. în rad/s.

Ca și la mișcarea circulară, între frecvența ν, perioada T și pulsația ω, mărimi caracteristice mișcării oscilatorii, sînt valabile relațiile:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu. \tag{10.10}$$

Din relația $k = m\omega^2$ ținînd seama de relația (10.10) obținem: $k = m \cdot 4\pi^2/T^2$ de unde rezultă:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{10.11}$$

Această relație reprezintă perioada oscilatorului liniar armonic și ea arată că perioada unui oscilator depinde de proprietățile sale inerțiale, prin masa m, și de cele elastice, prin constanta elastică k și nu depinde de condițiile inițiale în care se află oscilatorul.

EXPERIMENT

Cu un montaj ca cel din figura 3.65 se pot face determinări ale perioadei și frecvenței unui pendul elastic, evident neglijînd frecările interne și cele cu aerul. Se pune în oscilație pendulul, trăgîndu-l ușor cu mîna și apoi lăsîndu-l liber. Se numără oscilațiile n efectuate într-un interval de timp dat, t. Se modifică masa pendulului m prin adăugarea de discuri cu masa cunoscută.

Se pune din nou pendulul în stare de oscilație și se numără oscilațiile efectuate într-un timp determinat. Datele obținute se trec într-un tabel de forma celui de mai jos:

Dinamometrul 1 N							Dinamometrul 2,5 N					
Nr. crt.	n Nr. de oscilații	t (s)	m (kg)	T (s)	T_{mediu} (s)	k N/m	Nr. crt.	t (s)	m (kg)	T (s)	T_{mediu} (s)	k (N/m)

Cu datele obținute studiați dependențele $T = f(\sqrt{m})$ și $T = f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Ați putea indica eventualele surse de erori? Ce ar trebui făcut pentru a mări precizia determinărilor?

10.1.3. **Energia oscilatorului armonic.** După cum știți, un punct material de masă m, sub acțiunea unei forțe elastice $F = -ky$, descrie o mișcare oscilatorie armonică. La un moment dat t, elongația este $y = A \sin \omega t$ iar viteza mișcării $v = \omega A \cos \omega t$ (considerînd $\varphi_0 = 0$).

Cum energia de poziție în cîmpul forțelor elastice este $E_p = \frac{ky^2}{2}$, pentru oscilatorul liniar armonic avem:

$$E_p = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega t, \tag{10.12}$$

iar pentru energia cinetică a oscilatorului:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega t \tag{10.13}$$

(pentru că $m\omega^2 = k$).

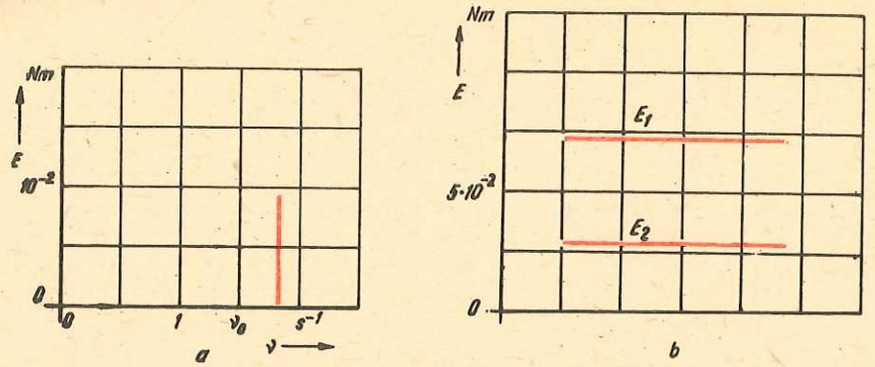


Fig. 10.6. *a)* Spectrul unei oscilații; *b)* schema nivelelor de energie a două oscilații.

Energia mecanică totală a oscilatorului liniar armonic este:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kA^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2\pi^2 \nu^2 A^2 m. \tag{10.14}$$

Din relația 10.14 deducem că *energia totală a oscilatorului liniar armonic este constantă în timp* — este un invariant.

Se folosesc două moduri de reprezentare a energiei unui oscilator:

a) se reprezintă grafic energia în funcție de frecvență (energia pe ordonată și frecvența pe abscisă). Se obține astfel un *spectru* al procesului respectiv. O oscilație armonică se reprezintă printr-o *linie spectrală* (fig. 10.6, *a*);

b) printr-o *schemă de nivele de energie.* Într-o schemă de nivele de energie, energia oscilatorului se reprezintă printr-o dreaptă orizontală situată la o înălțime corespunzătoare valorii energiei (fig. 10.6, *b*). Se spune că oscilatorul se află pe un anumit *nivel de energie.*

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp de masă m fixat de un resort de constantă k este deplasat cu distanța x_0 față de poziția de echilibru sub acțiunea unei forțe F. Lăsat apoi liber, corpul începe să oscileze armonic (fig. 10.7). Se cer: *a)* constanta elastică a resortului presupunînd valorile lui F și x_0 cunoscute; *b)* perioada oscilațiilor; *c)* viteza maximă atinsă de corp. (Se neglijează frecările.)

Rezolvare. a) Alungirea resortului pe distanța x_0 este produsă de forța F. Deci $k = F/x_0$.

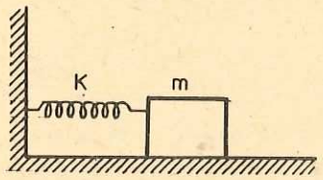


Fig. 10.7. Pentru problema rezolvată 1.

b) Din $k = m\omega^2$ obținem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ și

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

c) Viteza oscilatorului este dată de relația $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$ și este maximă cînd $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ deci $v_{max} = A\omega$ unde $A = x_0$ și $\omega = \sqrt{k/m}$ și deci $v_{max} = x_0 \sqrt{k/m}$.

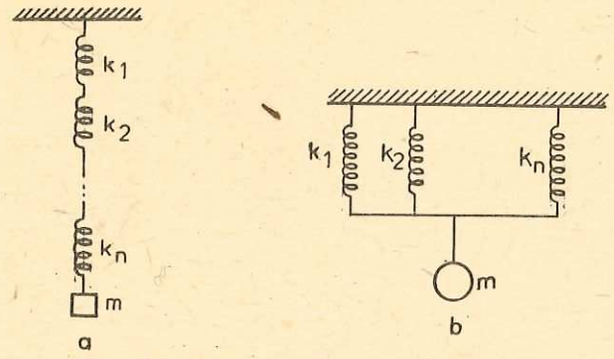


Fig. 10.8. Pentru problema rezolvată 2.

2. Să se calculeze perioada de oscilație a unui corp de masă m suspendat prin intermediul mai multor resorturi de constante $k_1, k_2, \ldots k_n$, cuplate: *a)* în serie; *b)* în paralel.

Rezolvare: a) Forța elastică care acționează asupra întregului sistem este:

$$F = k_{es} \cdot x$$

unde k_{es} este constanta echivalentă a resorturilor legate în serie. Se observă, din figura 10.8, *a*, că fiecare resort va avea o deplasare proprie x_i. Deci suma tuturor deplasărilor va fi tocmai deplasarea întregului sistem de resorturi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x.$$

Dar (neglijînd masele resorturilor) avem:

$$x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}, \quad \ldots x_n = \frac{F}{k_n} \quad \text{și} \quad x = \frac{F}{k_{es}},$$

și înlocuind în relația deplasărilor obținem:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \ldots + \frac{F}{k_n} = \frac{F}{k_{es}}.$$

După simplificare obținem:

$$\frac{1}{k_{es}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}.$$

Știind că $m\omega^2 = k_{es}$, rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{es}}{m}} \quad \text{și} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{es}}} = 2\pi \sqrt{m \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}}.$$

b) În acest caz din figura 10.8, *b* se vede că forța rezultantă este

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.$$

Resorturile avînd fiecare aceeași deplasare x. Deci vom avea:

$$F = k_{ep}x; \; F_1 = k_1 x; \; F_2 = k_2 x, \ldots, F_n = k_n x.$$

Și înlocuind în expresia forței F obținem:

$$k_{ep}x = k_1 x + k_2 x + \ldots + k_n x \quad \text{și}$$

$k_{ep}x = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x$; după simplificare rezultă:

$$k_{ep} = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \sum_{i+1}^{n} k_i.$$

Din $k_{ep} = m\omega^2$ avem:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{ep}}{m}} \text{ și } T = \frac{2\pi}{\omega}. \text{ Deci } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{ep}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sum_{i=1}^{n} k_i}}.$$

10.1.4. **Compunerea oscilațiilor.** Am văzut că sub acțiunea unei forțe de tip elastic un punct material descrie o mișcare oscilatorie armonică a cărei ecuație este de forma:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi) \text{ sau } y = a\sin(\omega t + \varphi)^*.$$

Ce se va întîmpla atunci cînd un punct material va fi solicitat să descrie în același timp două mișcări oscilatorii armonice? Ce fel de mișcare va avea în această situație punctul material?

Vom considera cazul în care cele două oscilații care solicită punctul material au aceeași direcție și aceeași pulsație (perioadă) dar amplitudinile și fazele inițiale diferite:

$$y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1) \qquad (10.15)$$
$$y_2 = a_2\sin(\omega t + \varphi_2).$$

Deplasarea y față de poziția de echilibru va fi dată de suma algebrică a deplasărilor y_1 și y_2 adică:

$$y_1 + y_2 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1) + a_2\sin(\omega t + \varphi_2). \qquad (10.16)$$

Să efectuăm această adunare cu ajutorul metodei fazorilor sau vectorilor rotitori.

Dacă vom considera un segment de dreaptă de lungime a_1 (fig. 10.9) care face cu axa Ox unghiul φ_1, drept un vector cu originea în O și sensul de la O la A, adică vectorul $\vec{a_1} = \overrightarrow{OA}$ și dacă acest vector se va roti cu viteza unghiulară ω (constantă) în sens trigonometric, atunci proiecția sa pe axa Oy la un moment oarecare t va fi:

$$y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1),$$

relație care reprezintă tocmai ecuația unei mișcări oscilatorii armonice.

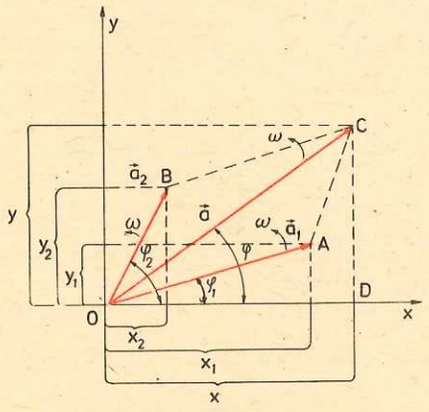


Fig. 10.9. Compunerea vectorilor rotitori care reprezintă mișcări oscilatorii armonice de aceeași pulsație.

Așadar, putem reprezenta grafic prin vectori rotitori, fazori, o mișcare oscilatorie armonică.

Deci cele două mișcări oscilatorii descrise de ecuațiile (10.15) pot fi reprezentate prin fazorii $\vec{a_1}$ și $\vec{a_2}$ care se rotesc

* Aici am notat amplitudinea cu litera a pentru a nu o confunda cu litera A din figura 10.9.

cu viteză unghiulară constantă ω, față de punctul O. Unghiul dintre vectorii $\vec{a_1}$ și $\vec{a_2}$ rămîne neschimbat și are valoarea $\varphi_2 - \varphi_1$.

Deoarece suma proiecțiilor a doi vectori pe o axă este egală cu proiecția pe aceeași axă a vectorului rezultant înseamnă că oscilația rezultantă poate fi reprezentată prin vectorul rezultant $\vec{a}$, care se obține din suma vectorială:

$$\vec{a_1} + \vec{a_2} = \vec{a}. \qquad (10.17)$$

Din figura 10.9 avem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (10.18)$$

și evident, vectorul rezultant $\vec{a}$ se rotește cu aceeași viteză unghiulară ω ca și vectorii $\vec{a_1}$ și $\vec{a_2}$.

Tot din figura 10.9 obținem și relația:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2} = \frac{CD}{DO} \qquad (10.19)$$

relație din care se poate determina unghiul φ, faza inițială a oscilației rezultante.

Oscilația rezultantă va fi dată de componenta vectorului $\vec{a}$ pe axa Oy adică va fi de forma:

$$y = y_1 + y_2 = a\sin(\omega t + \varphi). \qquad (10.20)$$

Așadar, mișcarea rezultantă este o mișcare oscilatorie armonică care are aceeași direcție ca oscilațiile y_1 și y_2 și aceeași pulsație ω. Amplitudinea a și faza inițială φ ale oscilației rezultante se determină în funcție de amplitudinile și de fazele inițiale ale oscilațiilor componente, după relațiile (10.18) și (10.19).

De reținut că, potrivit relației (10.18) amplitudinea oscilației rezultante depinde de diferența de fază $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ a oscilațiilor inițiale, care se compun.

a) Dacă $\Delta\varphi = 2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ atunci $\cos 2k\pi = 1$ și obținem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \text{ sau } a = a_1 + a_2.$$

Amplitudinea oscilației rezultante este egală cu suma amplitudinilor oscilațiilor componente a_1 *și* a_2. *În acest caz se spune că oscilațiile sînt în fază.*

b) Dacă $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ atunci $\cos(2k + 1)\pi = -1$ și obținem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2, \; a = |a_1 - a_2|$$

pentru că amplitudinea nu poate fi decît o mărime pozitivă.

Amplitudinea oscilației rezultante este egală cu valoarea absolută a diferenței amplitudinilor oscilațiilor componente, a_1 *și* a_2. *În acest caz se spune că oscilațiile sînt în opoziție de fază.*

c) Dacă $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ atunci $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$ şi obţinem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2$$

se spune că *oscilaţiile sînt în cvadratură sau „la sfert"*.

10.1.5. **Oscilaţii amortizate.** La studiul mişcării punctului material sub acţiunea unei forţe elastice, am presupus că nici o altă forţă nu mai acţionează asupra lui. În realitate, orice oscilaţie a unui punct material care nu este întreţinută din exterior, se amortizează; amplitudinea oscilaţiei scade cu timpul (fig. 10.10).

Cauzele amortizării sînt forţele care frînează mişcarea, de exemplu forţa de frecare în locul de suspensie la oscilaţia pendulului sau forţa de rezistenţă a mediului. În cazul unor rezistenţe mari ale mediului mişcarea devine aperiodică (fig. 10.11).

Teoretic, oscilaţiile unui punct (sistem) material ar trebui să înceteze complet numai după un interval de timp foarte mare — infinit. În realitate oscilaţiile încetează după un interval de timp relativ scurt deoarece în situaţia în care amplitudinea oscilaţiei ajunge sub o anumită valoare (de exemplu, de ordinul dimensiunilor moleculare) mişcarea sistemului material, luat ca întreg, devine imposibilă.

Energia transmisă unui sistem oscilant, în cazul amortizărilor, este cheltuită treptat sub formă de lucru mecanic necesar învingerii forţei de frecare. Pentru a întreţine oscilaţiile adică pentru a obţine oscilaţii neamortizate trebuie ca sistemul oscilant să primească mereu energie din afară.

Un sistem material în care amplitudinea oscilaţiei este menţinută neschimbată, datorită unei surse energetice care face parte din sistem se numeşte sistem autooscilant. (Un exemplu de astfel de sistem este ceasornicul cu pendul.)

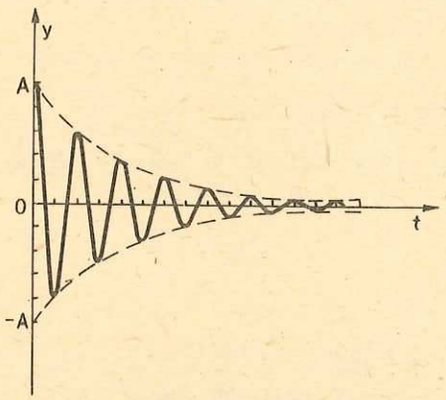


Fig. 10.10. Oscilaţii amortizate. Valoarea amplitudinii scade în timp.

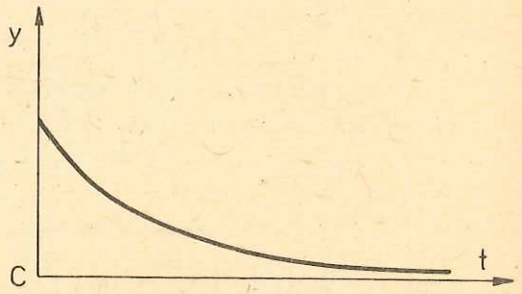


Fig. 10.11. Mişcare aperiodică.

10.2. PENDULUL GRAVITAŢIONAL. REZONANŢA

10.2.1. **Pendulul gravitaţional.** Un pendul gravitaţional este un corp idealizat (experimentul 1 de la pag. 255) redus la un punct material de masă m, suspendat de un fir inextensibil şi de masă neglijabilă. Dacă pendulul este deplasat din poziţia sa de echilibru şi este lăsat liber, el oscilează într-un plan vertical datorită forţei de greutate. În figura 10.12 este reprezentat un pendul de lungime l, masă m, care formează cu verticala un unghi θ numit *elongaţie unghiulară*. Forţele care acţionează asupra lui sînt: $\vec{G} = m\vec{g}$, forţa de greutate şi $\vec{T}$ tensiunea din fir. Componenta lui G pe direcţia firului este $G_n = mg\cos\theta$ iar componenta tangenţială $G_t = mg\sin\theta$. Componenta tangenţială este forţa de restabilire sau de revenire care acţionează asupra pendulului spre a-l readuce în poziţie de echilibru. Aşadar, forţa de restabilire este:

$$F = G_t = mg\sin\theta. \tag{10.21}$$

Remarcăm că forţa F nu este proporţională cu elongaţia unghiulară θ ci cu $\sin\theta$. Mişcarea pendulului nu este deci o mişcare oscilatorie armonică. În acest caz nu se mai poate vorbi de o perioadă proprie de oscilaţie. Două oscilaţii cu amplitudine diferită au perioade diferite, oscilaţiile nu mai sînt izocrone.

Dacă unghiurile θ sînt mici atunci $\sin\theta$ este foarte apropiat de θ exprimat în radiani. Analizînd tabelul următor observăm că pentru unghiuri sub 5° putem scrie că $\sin\theta \approx \theta$ în radiani.

Unghiul θ		$\sin\theta$
grade	radiani	
0°	0,0000	0,0000
2°	0,0349	0,0349
5°	0,0873	0,0872

Dacă exprimăm unghiul θ în radiani avem $\theta = \frac{x^*}{l}$ şi vom obţine înlocuind $\sin\theta$ cu θ: $F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x = -kx$, unde, semnul minus indică faptul că această forţă este totdeauna de sens opus elongaţiei.

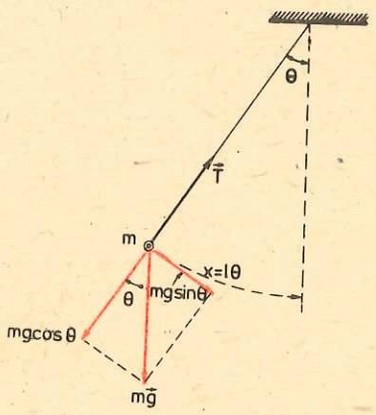


Fig. 10.12. Forţele care acţionează asupra unui pendul gravitaţional.

* Am notat cu x distanţa de la poziţia de echilibru, măsurată pe cerc astfel: $x > 0$ în dreapta poziţiei de echilibru şi $x < 0$ în stînga poziţiei de echilibru.

Așadar pentru unghiuri mici, forța de revenire spre poziția de echilibru este aproximativ de tip elastic (forță cvasielastică) și mișcarea pendulului gravitațional poate fi considerată în acet caz o mișcare oscilatorie armonică.

Cum $\frac{mg}{l} = k$, perioada proprie de oscilație a pendulului devine:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (10.22)$$

Din relația (10.22) reținem că perioada pendulului gravitațional este independentă de masa pendulului. Deoarece, pentru unghiuri mici, perioada pendulului gravitațional este independentă de amplitudine, pendulul este folosit ca indicator de timp.

Pendulul gravitațional oferă o metodă simplă pentru determinarea valorii accelerației gravitaționale g, măsurînd cu eroare cît mai mică lungimea l și perioada proprie T a pendulului.

EXPERIMENT

De un fir lung și subțire cu lungimea $l = 1$ m, suspendat la un capăt, se atîrnă o mică sferă de plumb (oțel sau bronz) cu un diametru de 2—3 cm. Se scoate pendulul astfel format din poziția de echilibru, deplasîndu-l față de verticală cu un unghi θ care să nu depășească 5° și se lasă apoi liber. Sistemul începe să oscileze. Se notează un anumit număr n de oscilații și timpul t corespunzător acestora. Perioada de oscilație se determină din relația $T = t/n$. Considerînd sistemul bilă — fir un pendul gravitațional, din expresia perioadei $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ obținem $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, relație din care putem determina valoarea accelerației gravitaționale locale. Rezultatele unui număr mare de determinări se trec într-un tabel de forma:

nr. crt.	n oscilații	t (s)	$T = t/n$ (s)	T_m (s)	g (m/s²)	g_m (m/s²)

Ce observații puteți face? Coincid rezultatele determinărilor? De ce? Care sînt erorile pe care credeți că le-ați făcut? Cum s-ar putea înlătura sau micșora aceste erori?

10.2.2. **Oscilații forțate. Transfer de energie între doi oscilatori. Rezonanță.** Să presupunem că un sistem mecanic E, pe care-l vom numi excitator, care efectuează oscilații armonice de perioadă T și amplitudine constantă,

exercită o acțiune asupra unui alt oscilator mecanic R cu perioada proprie de oscilație T_0, pe care-l numim rezonator. Experiența arată că sistemul R are totdeauna o mișcare armonică cu perioada T pe care i-o impune oscilatorul E. Se spune că rezonatorul efectuează oscilații forțate sincronizate cu cele ale excitatorului. Acțiunea mecanică exercitată de excitator asupra rezonatorului se numește *cuplaj*.

EXPERIMENT

a) Două pendule simple (fig. 10.13), unul masiv P_1 și altul ușor P_2, suspendate prin fire rigide, cu amortizare mică, sînt legate între ele prin intermediul unui resort de masă neglijabilă care nu este deformat atunci cînd pendulele sînt în repaus. Pendulul P_1, fiind pus în mișcare, exercită de fiecare dată asupra lui P_2 prin intermediul resortului, o forță care variază cu elongația sa. Are loc în aceste condiții, un transfer de energie de la P_1 către P_2. Pendulul P_2 oscilează cu aceeași frecvență ca P_1 și dacă P_1 este ales mult mai greu ca P_2 forța exercitată de P_2, respectiv energia transmisă către P_1 este neglijabilă.

b) Aceeași experiență se mai poate realiza suprimînd resortul R și suspendînd două pendule de o coardă bine întinsă (fig. 10.14). P_1 exercită asupra corzii în punctul de suspensie O_1 o forță care se transmite punctului de contact O_2 al pendulului P_2 și care va oscila cu frecvența (perioada) impusă de P_1. În acest caz amplitudinea de oscilație a lui P_2 este mult mai mică decît în cazul analizat înainte. Cuplajul este mai slab. Transferul de energie dintre cele două pendule — oscilatori se realizează cu pierderi mari.

c) Pe o coardă bine întinsă sînt suspendate mai multe pendule rezonatoare dar cu lungimi diferite (fig. 10.15) unele avînd pulsația (perioada) proprie inferioară, altele superioară, pendulului excitator P_1. Dacă P_1 este pus în stare de oscilație, se poate observa că celelalte pendule vor începe să oscileze

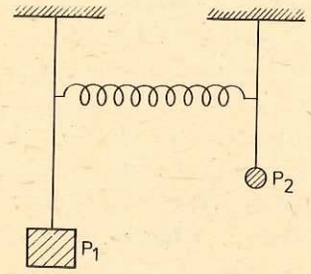


Fig. 10.13. Oscilații forțate ale pendulului P_2, cuplaj strîns.

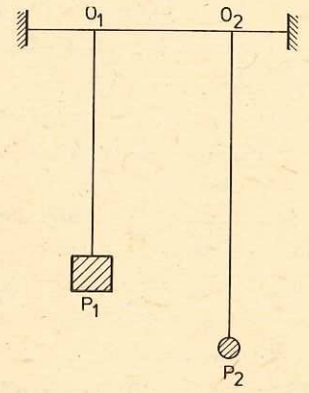


Fig. 10.14. Oscilații forțate ale pendulului P_2, cuplaj slab.

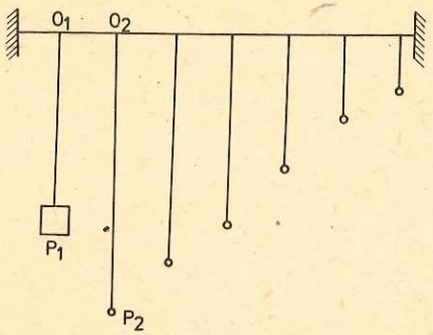


Fig. 10.15. Pendule rezonatoare cu diferite pulsaţii.

datorită transferului de energie prin coardă de la pendulul excitator. De remarcat un fapt interesant şi anume că amplitudinea oscilatorilor este diferită. Ea este cu atît mai mare cu cît perioada proprie de oscilaţie a rezonatorului este mai apropiată, ca valoare, de perioada excitatorului. Dacă unul dintre pendulele rezonatoare are pulsaţia (perioada) proprie de oscilaţie foarte apropiată de cea a excitatorului, atunci amplitudinea sa de oscilaţie, în condiţiile date este cea mai mare, este maximă. Are loc deci un transfer maxim (optim) de energie între cei doi oscilatori.

Transferul energiei de la excitator la sistemul excitat, transfer care se face pentru orice perioadă a excitatorului, este maxim pentru perioadele (pulsaţiile) apropiate de perioada proprie a sistemului excitat. Procesul selectiv de transfer de energie între două sisteme fizice se numeşte rezonanţă.

10.3. PROPAGAREA MIŞCĂRII OSCILATORII

10.3.1. **Propagarea unei perturbaţii.** *a)* Un cablu lung de cauciuc (o coardă, un resort) bine întins, lovit la unul din capete ne permite să observăm transmiterea unei mici deformaţii pînă la celălalt capăt al cablului, după un anumit timp din momentul lovirii.

b) Ne aflăm pe marginea unui bazin cu apă a cărui suprafaţă este netulburată de valuri. Aruncînd o piatră în apă, observăm valuri mici de forma unor cercuri concentrice a căror rază creşte foarte repede. Mai tîrziu vedem aceste mici valuri la distanţe mari faţă de locul în care am aruncat piatra. Perturbaţia provocată prin căderea pietrei pe suprafaţa apei n-a rămas localizată ci s-a transmis pe suprafaţa apei din bazin.

c) Ne aflăm pe un stadion. Asistăm la o întrecere sportivă: cursă cu obstacole, ştafetă etc. S-a dat startul. Vedem mai întîi mica flacără şi fumul produs de pistolul de start şi ceva mai tîrziu auzim şi pocnetul (sunetul) produs de cartuşul percutat.

Iată, în exemplele anterioare, cîteva cazuri particulare ale unei situaţii generale în natură: sistemele materiale nu „răspund" la perturbaţiile exterioare, decît după un anumit timp de la producerea lor. Ştiţi deja că un sistem material este un ansamblu de corpuri (eventual cîmpuri fizice) între care se exercită interacţiuni, forţe. Aceste forţe depind în general de distanţele relative dintre componentele sistemului. Mai mult, chiar, interacţiunile interne scad, uneori foarte repede, cînd distanţele dintre componente cresc. În acest fel, de multe ori, deformaţia sistemului se realizează din aproape în aproape

fiecare componentă influenţînd numai pe cele imediat apropiate. Acesta este motivul pentru care „răspunsul" sistemului apare întîrziat faţă de perturbaţia externă aplicată.

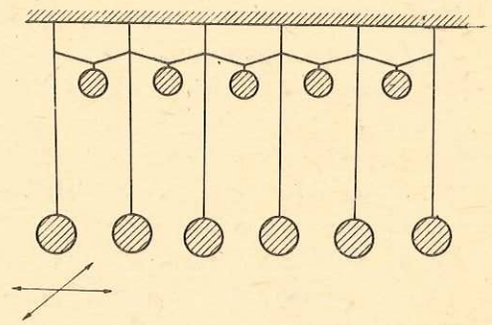


Fig. 10.16. Lanţ de bile prin care se pot transmite perturbaţii.

EXPERIMENT

Pe o bară cu lungimea de 1,5—2 m, suspendăm mai multe bile identice cu diametrul de 2,5—3 cm (fig. 10.16). Firele de suspensie au lungimea de 1—1,2 m iar distanţa dintre aceste fire este de 10—15 cm. Firele de suspensie sînt legate între ele prin fire scurte de care sînt atîrnate corpuri identice cu masa de 100 g fiecare. Un şoc, un impuls, aplicat transversal la unul din capetele lanţului de bile se va transmite din aproape în aproape pînă la celălalt capăt al lanţului. Lanţul de bile legate între ele ne permite să observăm că perturbaţia produsă din exterior nu rămîne localizată, nu oscilează numai bila lovită ci oscilaţia se propagă din aproape în aproape în tot lanţul de bile.

Să considerăm un lanţ de bile (particule), identice ca formă şi avînd aceeaşi masă, legate între ele prin resorturi de aceeaşi lungime şi aceeaşi constantă elastică (fig. 10.17). Lanţul de bile legate prin resorturi modelează mediile reale în care se pot propaga perturbaţii produse din exterior. Aparent există o mare deosebire între lanţul de particule şi mediile (corpurile reale) din exemplele anterioare. În fizică este folosită metoda modelării obiectului sau fenomenului de studiat, construindu-se sisteme—modele ideale, care păstrează proprietăţile esenţiale ale obiectului sau fenomenului real. Pe aceste modele se pot obţine rezultate ce aproximează bine realitatea.

În cazurile prezentate la începutul paragrafului, elementele esenţiale ale propagării sunetului în aer respectiv ale propagării perturbaţiei pe suprafaţa apei şi pe tubul de cauciuc sînt legate de structura mediului prin care trec aceste perturbaţii (aer, apă, cauciuc). Aceste medii au o structură corpusculară, sînt constituite din atomi sau molecule între care se exercită forţe de legătură care pot fi considerate forţe elastice cu bună aproximaţie.

Presupunem că, iniţial, resorturile lanţului sînt complet relaxate. Acţionăm din exterior cu o forţă $\vec{F}$ asupra bilei *1* din capătul lanţului, deplasînd-o spre dreapta. Să urmărim ce se întîmplă în timpul deformării resortului. Asupra bilei *2* va începe să acţioneze o forţă F' mai mică decît F, egală cu dife-

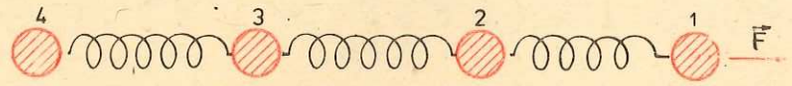


Fig. 10.17. Lanţ de bile şi resorturi, model de mediu elastic.

rența dintre tensiunea din resortul *1—2* și cea din resortul *2—3* (aceste tensiuni sînt de sensuri opuse cînd sînt aplicate asupra bilei *2*).

Dacă acceptăm că tensiunea din resortul *1—2* este cel mult egală cu forța externă, rezultă că asupra bilei *2* va acționa mereu o forță mai mică decît asupra bilei *1*. Înseamnă că accelerația bilei *2* va fi mereu mai mică decît cea a bilei *1* și deci, la orice moment intermediar, între aplicarea forței externe și întinderea maximă a resortului *1—2*, bila *2* va avea o depărtare mai mică față de poziția de echilibru decît bila *1*. Considerînd tensiunea din resortul *1—2* ca o forță externă aplicată bilei *2* constatăm că depărtarea de poziția de echilibru a bilei *2* va fi totdeauna mai mare decît cea a bilei *3*. În acest fel, continuînd raționamentul, se poate înțelege de ce fiecare bilă — particulă se depărtează de poziția de echilibru cu o distanță mai mică decît precedenta și mai mare decît următoarea (fig. 10.18).

Considerînd lanțul suficient de lung ajungem la concluzia că trebuie să existe o bilă-particulă în acest lanț, fie n aceasta, care pînă la un anumit moment de la aplicarea forței $\vec{F}$ nu se deplasează din poziția de echilibru. Aceasta înseamnă că tensiunea din resortul n-$(n+1)$ este nulă și deci nici bilele $(n+1)$, $(n+2)$, ... nu se deplasează din pozițiile lor inițiale. Această situație are loc pînă la un anumit moment t. În momentul imediat următor, particula n intră în mișcare și începe să întindă resortul n-$(n+1)$. În acest fel lanțul tinde să repartizeze uniform, răspunsul la forța externă, $\vec{F}$, între toate resorturile sale. Dar, după cum am constatat, acestea nu se întind în același timp și putem ajunge la situația în care forța $\vec{F}$ poate să dispară la un moment dat, și să găsim totuși în lanț resorturi întinse sau comprimate. Mișcarea se transmite, se propagă, astfel din aproape în aproape, de la un capăt la celălalt al lanțului chiar și după încetarea acțiunii externe.

Fenomenul de transmitere a unei perturbații într-un mediu material se numește undă.

Dacă în mediul material perturbat apar numai forțe elastice spunem că unda care ia naștere este o undă elastică.

Mulțimea particulelor-bile din sistem (mediu) care la momentul t nu au fost încă solicitate, dar care vor intra în mișcare în momentul imediat următor constituie ceea ce se numește *frontul undei*.

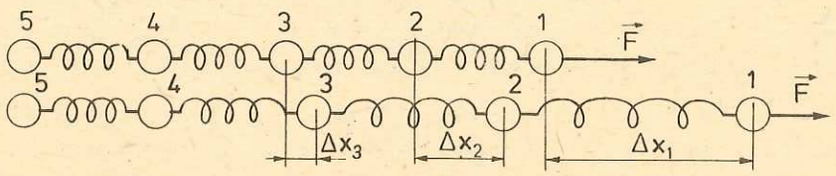


Fig. 10.18. Lanț de bile-resorturi sub acțiunea unei forțe.

10.3.2. **Surse de oscilații. Principiul lui Huygens.** Să reluăm analiza lanțului de bile-resorturi. Se poate întîmpla ca la un moment dat bila *1* să revină în poziția de echilibru după un număr oarecare de oscilații. S-ar părea că mișcarea ar trebui să înceteze, să se stingă, în lanțul de resorturi. Dar așa ceva nu se întîmplă. În momentul în care bila *1* se află din nou în poziție de echilibru există o altă bilă, chiar mai multe, care se află în situația identică cu cea din momentul inițial al bilei *1*. Totul se petrece ca și cum perturbația externă ar fi fost aplicată acestei bile și nu primei bile din lanț. De reținut că aceste afirmații au sens dacă frecarea este suficient de mică, adică dacă mediul de propagare a undei este slab disipativ (pierderile de energie sînt foarte mici). Mai mult, se presupune că forțele interne care apar la transmiterea perturbației sînt numai forțe elastice. (Astfel de medii de propagare se numesc medii elastice iar undele care apar în astfel de medii sînt unde elastice.)

„Punctul" în care se aplică perturbația externă se mai numește sursă sau centru de oscilație, deoarece de cele mai multe ori perturbațiile au o formă oscilantă și sînt aplicate în regiuni restrînse ale mediului, destul de mici față de dimensiunile mediului perturbat.

Constatarea făcută mai sus, în ceea ce privește propagarea perturbației, poate fi exprimată astfel:

punctul unde a ajuns unda la un moment dat poate fi considerat centru de oscilație în locul celui inițial.

Această propoziție constituie un caz particular a unei legi de propagare specifică mediilor elastice, denumită *principiul lui Huygens*.

10.3.3. **Vectorul de oscilație.** Să presupunem că perturbația inițială nu mai are loc în lungul lanțului bile-resorturi ci pe o direcție oarecare (fig. 10.19). Să considerăm un anumit moment al mișcării t și o anumită bilă n din lanț. În acel moment bila n este deplasată față de poziția ei de echilibru. Să atașăm bilei n un vector $\vec{u}$ care are originea în poziția de echilibru a bilei n, mărimea egală cu depărtarea bilei față de poziția inițială la momentul respectiv, direcția dată de dreapta care unește cele două poziții și vîrful în locul unde se află bila în momentul considerat. Acest vector se numește *vector de oscilație*. Valoarea sa la un moment dat poartă numele de elongație, iar elongația maximă se numește amplitudine. Dacă sînt cunoscuți vectorii de oscilație ai tuturor bilelor la orice moment atunci spunem că este cunoscută unda elastică respectivă.

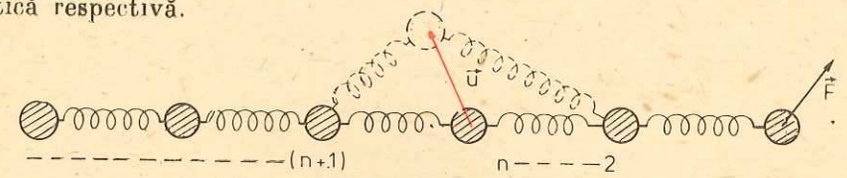


Fig. 10.19. Lanț de bile-resorturi prin care se transmite o perturbație pe o direcție oarecare.

Observăm că vectorul de oscilaţie $\vec{u}$ este dependent de timp iar pentru acelaşi moment el diferă de la o bilă la alta adică depinde de depărtarea faţă de poziţia de echilibru a fiecărei bile.

Să analizăm un caz real. Vom presupune deci că avem un (corp) mediu prin care se propagă o undă iniţiată de o anumită perturbaţie externă. Ca oricare altul, mediul material considerat este format din microparticule (atomi, molecule). Aceste particule se vor comporta asemenea bilelor din lanţul de resorturi, între ele exercitîndu-se forţe care pot fi asimilate cu tensiunile — forţele elastice, din resort. Sînt însă şi deosebiri mari: *a)* în primul rînd particulele unui mediu real formează o structură spaţială şi nu una liniară ca modelul lanţ de resorturi-bile; *b)* în al doilea rînd forţele dintre ele pot să nu fie elastice, adică nu sînt proporţionale cu depărtarea faţă de poziţia de echilibru. Aceste deosebiri, cu toate că sînt importante, nu duc la rezultate mult diferite de cele care se obţin cu modelul lanţ (liniar) de resorturi-bile.

De precizat că, în cazul real, nu fiecare particulă oscilează separat; se întîmplă,în cazul unor unde,ca grupuri întregi de particule să se mişte la fel şi deci să joace împreună rolul unei bile-particule din lanţ.

10.4. UNDE TRANSVERSALE. UNDE LONGITUDINALE VITEZA DE PROPAGARE

10.4.1. **Tipuri de unde.** Să considerăm, faţă de un sistem de referinţă triortogonal *Oxyz*, poziţia de echilibru a unui grup de particule din mediu, care se mişcă la fel (fig. 10.20). Grupul de particule care oscilează la fel ocupă un anumit volum pe care-l considerăm mic în raport cu dimensiunile mediului. Fiind foarte mic, este puţin importantă forma acestui volum şi de aceea

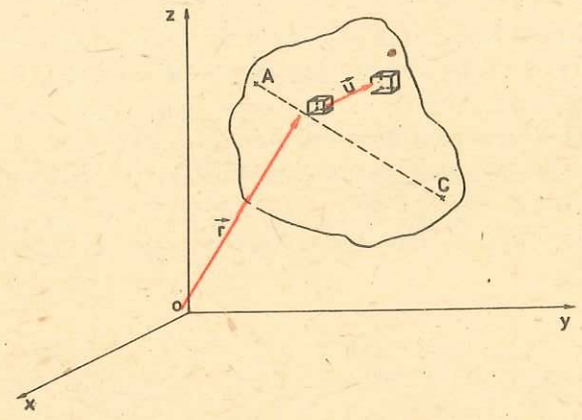


Fig. 10.20. Transmiterea unei perturbaţii pentru un grup de particule identice. Vectorul $\vec{u}$ este vectorul de oscilaţie.

îl putem considera de formă paralelipipedică. Poziţia faţă de sistemul de referinţă *Oxyz* se fixează cu ajutorul vectorului de poziţie $\vec{r}$ al centrului acestui mic paralelipiped.

Sub acţiunea undei, grupul de particule se va deplasa din poziţia iniţială într-altă poziţie. Vectorul de oscilaţie uneşte centrele celor două paralelipipede aşa cum arată şi figura 10.20. Mărimea şi orientarea acestui vector depind de timp şi de poziţia de echilibru a grupului de particule. Putem scrie deci $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$. Să considerăm un centru de oscilaţie C în care s-a aplicat o perturbaţie externă. După un timp ea s-a transmis pînă în punctul A. Dreapta CA se numeşte direcţie de propagare sau rază de undă, deoarece mişcarea se transmite, se propagă, în mediul considerat după direcţiile unor „raze" care pleacă din C. Pe o astfel de direcţie lucrurile se petrec asemănător cu cele analizate la modelul lanţ de resorturi şi bile.

Distingem două cazuri particulare importante:

a) este posibil ca vectorul de oscilaţie, variabil în timp să fie mereu şi pentru orice particulă perpendicular pe direcţia de propagare;

b) vectorul de oscilaţie să aibă direcţia identică cu direcţia de propagare.

În primul caz *unda este transversală*, iar în celălalt *unda este longitudinală*.

Din nou trebuie precizat că o undă nu apare într-un mediu real decît dacă între componentele acestuia se exercită interacţiuni. Astfel, undele transversale nu se pot produce decît în medii în care se manifestă interacţiuni perpendiculare pe direcţia de propagare, forţe de forfecare (de torsiune). Să luăm de exemplu fluidele, acestea sînt caracterizate prin proprietatea de curgere, adică particulele constituente nu interacţionează prin forţe perpendiculare pe dreptele care unesc centrele particulelor între ele, ci numai prin forţe de-a lungul acestor drepte. Aşadar, o deformare de forfecare nu se poate propaga prin fluide pentru că nu există forţe de revenire, forţe elastice, care să readucă particulele în poziţiile lor iniţiale. Prin fluide se pot propaga numai deformările (comprimările) de-a lungul razelor de undă, situaţie în care vectorii de oscilaţie sînt paraleli cu direcţia de propagare, adică se pot propaga numai unde longitudinale.

În (corpurile) mediile solide se manifestă forţe în toate direcţiile şi deci în aceste medii undele pot fi atît transversale cît şi longitudinale.

10.4.2. **Lungime de undă. Viteză de propagare.** Să reluăm analiza modelului iniţial. Presupunem că perturbaţia externă este periodică, cum se şi întîmplă în realitate de multe ori. Astfel, după un timp T egal cu o perioadă, bila *1* s-ar putea afla exact în situaţia dinaintea aplicării perturbaţiei. Să notăm cu m bila pînă la care a ajuns unda la momentul $t = T$. Atunci bilele m şi *1* se află în aceeaşi situaţie şi se vor mişca la fel, adică vectorii lor de oscilaţie vor fi egali la orice moment ulterior, $\vec{u}_m = \vec{u}_1$. Se spune că bilele *1* şi m oscilează în fază, sînt în concordanţă de fază. Punctele, particulele, care oscilează la fel într-un mediu prin care se propagă o undă se numesc puncte de egală fază. Aceste puncte se dispun pe suprafeţe închise în jurul centrului de

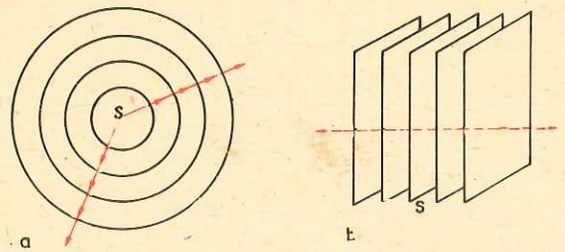


Fig. 10.21. *a)* Unde sferice *b)* unde plane.

oscilație, numite suprafețe de egală fază sau suprafețe de undă. Se poate demonstra că razele de undă sînt perpendiculare pe suprafețele de egală fază.

Forma suprafeței de undă depinde atît de proprietățile mediului cît și de forma sursei. În mediile omogene și izotrope, dacă sursa de oscilație este punctiformă sau sferică, suprafața de undă, deci și frontul de undă, sînt sfere concentrice. Undele care se formează în acest caz se numesc *unde sferice* (fig. 10.21, *a*).

Cînd sursa de oscilație este o suprafață plană atunci unda care se transmite este o *undă plană* (fig. 10.21, *b*).

La distanțe mari de sursa de perturbație o undă sferică poate fi considerată, într-o regiune mică a mediului, ca o undă plană, pe regiuni restrînse asimilîndu-se suprafața sferei de rază mare cu o suprafață plană.

Să aplicăm acum principiul lui Huygens: dacă bila m oscilează la fel ca bila *1* putem considera că unda care se propagă de la bila m la bilele $(m + 1)$, $(m + 2)$ etc. își are centrul de oscilație în bila m. Cum toate bilele din lanț sînt identice și lanțul este suficient de lung rezultă că prima bilă care va oscila exact la fel ca bila m va fi cea cu numărul $2m$ ș.a.m.d. Așadar bilele $1m$. $2m$, $3m$, ... vor fi bile care oscilează în fază. Același raționament se poate aplica oricărei particule-bile k $(1 < k < m)$. Concluzia este că, pe o rază de undă, punctele care oscilează în fază sînt egal depărtate.

Distanța dintre două puncte vecine (succesive) de egală fază se numește lungime de undă și se notează cu λ.

În general, lungimea de undă nu este aceeași pentru toate razele de undă, pentru orice direcție de propagare din mediul respectiv. Mediile (corpurile) în care lungimea de undă nu depinde de direcția de propagare se numesc medii izotrope.

Cu ce viteză se deplaseaza o undă, frontul undei, într-un mediu elastic?

În timp de o perioadă T unda parcurge distanța dintre două puncte de egală fază, situate pe aceeași direcție de propagare, adică distanța λ și deci putem scrie

$$v_f = \frac{\lambda}{T} \qquad (10.23)$$

unde v_f se numește *viteza de fază*, viteza de propagare a frontului de undă, a fazei.

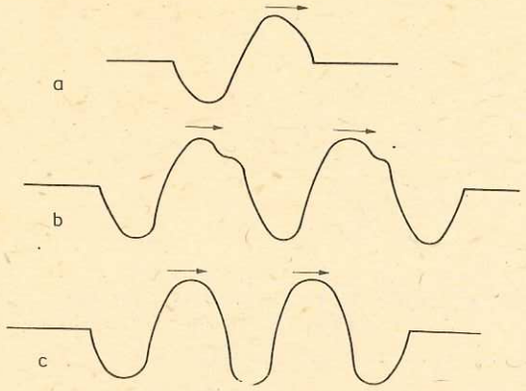


Fig. 10.22. Undă transversală pe un cablu (*a*). Tren de unde transversale (*b*) și (*c*).

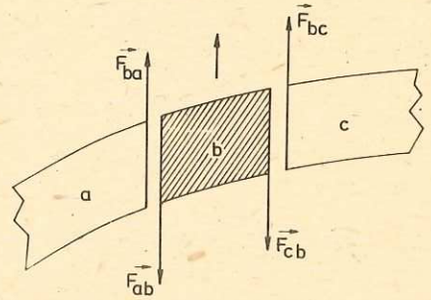


Fig. 10.23. Unda transversală presupune deformări de forfecare.

10.4.3. Unde transversale

EXPERIMENT

a) Un cablu de cauciuc (o coardă, un resort elastic) este lovit lateral. Se observă că propagarea acestei perturbații se face prin deformări perpendiculare pe direcția de transmitere a mișcării (fig. 10.22, *a*). O astfel de undă este un exemplu de undă transversală.

Dacă se produce o perturbație exterioară la intervale egale de timp sau este produsă o oscilație armonică, atunci pe cablu sau pe coardă se vor transmite perturbații succesive. Acest grup de perturbații formează un tren de unde (fig. 10.22, *b* și *c*).

Producerea undelor transversale într-un cablu, o coardă, un resort etc. este posibilă datorită faptului că orice parte a mediului solid poate antrena în mișcarea sa părțile învecinate, provocînd solicitări de forfecare (fig. 10.23). În figură sînt prezentate trei părți vecine antrenate în propagarea perturbației. Mișcarea părții *b* (din mijloc) nu se poate face fără antrenarea părților *a* (forța $\vec{F}_{ba}$) și *c* (forța $\vec{F}_{bc}$) care se opun prin forțele $\vec{F}_{ab}$ respectiv $\vec{F}_{cb}$. Aceste legături asigură cuplajul părților *a*, *b*, *c* și determină apariția deformărilor elastice și deci a forțelor elastice de revenire. Evident numai în corpurile solide pot apărea deformări elastice de acest fel pe cînd în fluide nu. Așadar undele transversale pot apărea numai în mediile (corpurile) solide.

Dacă sursa de oscilație produce oscilații într-un plan oarecare, atunci orice punct de pe direcția de propagare oscilează în planul inițial (planul de oscilație al sursei). Deplasînd de-a lungul corzii (cablului), în planul de oscilație al sursei, o fantă, vom constata că ea nu împiedică transmiterea perturbației (fig. 10.24). Se spune că undele transversale sînt *unde polarizate*.

b) Un model de mediu în care se propagă o undă transversală îl reprezintă bilele suspendate, reprezentate în figura 10.25 care pot fi asimilate

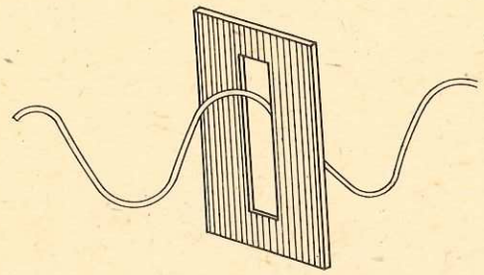


Fig. 10.24. Undă transversală plan polarizată.

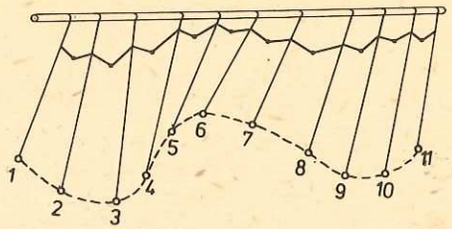


Fig. 10.25. Propagarea unei oscilații armonice pe un lanț de pendule gravitaționale.

drept pendule gravitaționale. Lanțul de pendule cuplate modelează un mediu omogen și izotrop.

Dacă punem în mișcare de oscilație un pendul din capătul lanțului, de exemplu pendulul *1*, printr-un impuls transmis perpendicular pe direcția lanțului de pendule, datorită cuplajului, energia se transmite de la pendulul *1* în lanțul de oscilatori. Pentru mediul format din lanțul de pendule, excitarea pendulului *1* constituie o perturbație și acest pendul poate fi considerat drept o sursă de oscilație. Menținînd mișcarea sursei, se constată că mișcarea celorlalți oscilatori continuă. Fiecare oscilator execută oscilații forțate cu frecvența impusă de frecvența sursei. Evident, procesul de propagare are loc în timp. Dacă măsurăm timpul necesar ca o perturbație să ajungă la un pendul oarecare din lanț, vom observa că acesta depinde de distanța dintre sursa de oscilație și pendulul considerat. Fiecare pendul intră în stare de oscilație mai tîrziu decît cel precedent. Faza mișcării fiecărui pendul diferă de a celui precedent și de a celui care urmează. Pentru că toți oscilatorii sînt identici și cuplajele sînt de același fel, viteza de propagare a oscilației este constantă, în absența forțelor disipative (forța de frecare). Cît timp viteza de propagare, viteza fazei sau viteza de fază rămîne constantă, distanța dintre doi oscilatori consecutivi, care oscilează în fază (*1* și *9*; *2* și *10*, figura 10.25) este constantă. Această distanță reprezintă chiar lungimea de undă, fapt ce justifică afirmația că această mărime este caracteristică unei unde cînd propagarea are loc într-un mediu izotrop și omogen.

Din relația (10.23) și din descrierea procesului de propagare, rezultă că lungimea de undă este determinată de doi factori: unul care depinde de sursă (perioada sau pulsația sursei) și al doilea (viteza de fază) care depinde de mediul de propagare, de proprietățile lui elastice, adică de cuplajul dintre particulele mediului.

Se demonstrează că viteza v_t de propagare a unei unde transversale pe o coardă depinde de tensiunea T_m la care este solicitată coarda și de masa μ a unității de lungime a corzii:

$$v_t = \sqrt{\frac{T_m}{\mu}},$$

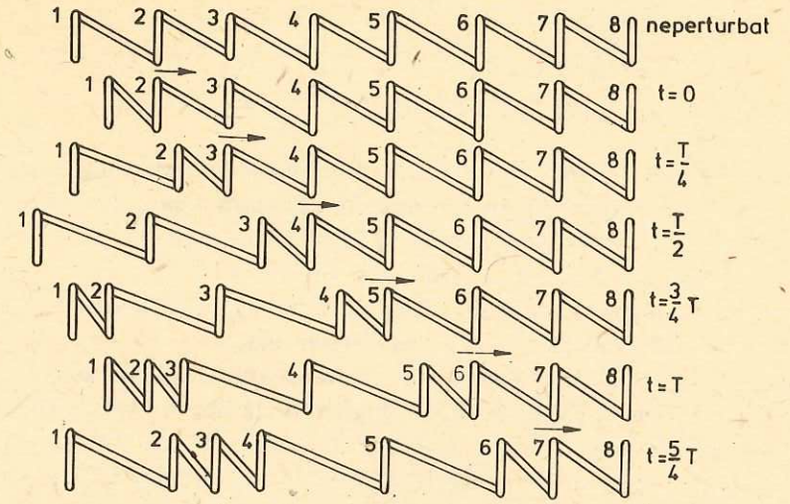


Fig. 10.26. Undă longitudinală într-un resort elastic.

Dacă oscilațiile sursei nu sînt întreținute, amortizarea este foarte rapidă, energia sursei fiind transferată lanțului de oscilatori și disipată prin frecări. Unda se stinge foarte repede.

10.4.4. **Unde longitudinale.** Să considerăm un resort de oțel cu spirele în repaus și echidistanțate (fig. 10.26.) Resortul îl putem lua drept un șir — lanț de spire (oscilatori) cuplate elastic, fiecare spiră putînd oscila de-a lungul axei sale în jurul unei poziții de echilibru. Provocăm o perturbație a resortului, trăgînd de o spiră în lungul axei resortului și lăsînd-o după aceea liberă. Perturbația se propagă în resort în lungul axului său prin punerea în starea de oscilație a fiecărei spire. Unda care a apărut în resort, în acest caz, se numește undă longitudinală. Datorită frecărilor cu aerul și îndeosebi datorită frecărilor interne din materialul spirei, oscilațiile lor se sting, resortul atingînd destul de repede starea de repaus.

Dacă prima spiră va fi pusă în mișcare, pe o cale oarecare și dacă această mișcare este oscilatorie armonică, atunci și spirele următoare vor descrie o mișcare asemănătoare după trecerea perturbației inițiale. Figura 10.26 surprinde resortul parcurs de o undă longitudinală, la diferite momente exprimate în fracțiuni din perioada oscilației armonice a sursei de oscilație (spira *1*). Se observă că în timp ce comprimarea avansează spre dreapta, fiecare spiră care intră în mișcare continuă să oscileze în jurul poziției de echilibru. De exemplu spira *1* face o oscilație completă între $t = 0$ și $t = T$, cînd apare o nouă comprimare care se va transmite în lungul resortului. Există spire care oscilează în concordanță de fază cum sînt, de exemplu, spirele *1* și *5*, *2* și *6*.

Considerînd resortul un mediu omogen și izotrop, propagarea perturbației se va face de-a lungul resortului cu aceeași viteză v. În timp de o perioadă T

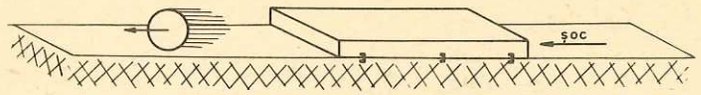


Fig. 10.27. Undă longitudinală într-un corp solid.

în care spira *1*, de exemplu, descrie o oscilație completă, distanța parcursă de perturbație este vT. Perturbația a ajuns pînă la spira *5* care începe să oscileze în fază cu spira *1*. Distanța dintre două spire consecutive (*1* și *5*, *2* și *6*) care oscilează în fază este lungimea de undă și constituie o caracteristică a undei respective. Unda longitudinală nu este polarizată ca unda transversală. Acest lucru se poate demonstra pe cale experimentală.

Undele longitudinale se pot forma atît în mediile solide cît și în cele fluide (lichide și gaze). Un exemplu de undă longitudinală într-un solid este transmiterea perturbației produsă de o lovitură de ciocan la capătul unei bare, în lungul acesteia. Acest lucru poate fi verificat, dacă la celălalt capăt al barei se alătură o bilă de bara fixată rigid. Cînd perturbația va ajunge la capătul barei, bila este proiectată pe direcția barei în sensul propagării perturbației (fig. 10.27).

Ca și în cazul undelor transversale, viteza de propagare a undelor longitudinale depinde de caracteristicile mediului de propagare. Se demonstrează că viteza v_l a unei unde longitudinale este

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate iar ρ densitatea mediului de propagare.

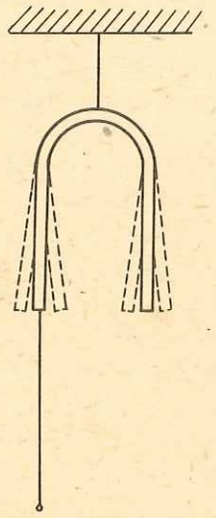


Fig. 10.28. Pentru exercițiul 1.

PROBLEME REZOLVATE

1. La capătul unei ramuri a unui diapazon (fig. 10.28), se leagă un fir de lungime $l = 2$ m și masă $m = 12$ g. De fir se suspendă un corp cu masa $m_1 = 960$ g. Diapazonul oscilează. Să se calculeze: *a)* viteza de propagare a undelor în fir; *b)* frecvența de oscilație a diapazonului, dacă lungimea de undă este de 40 cm. *c)* Cum se schimbă viteza de propagare a undei, dacă se dublează masa corpului suspendat?

Rezolvare: *a)* În fir se propagă unde transversale. Neglijînd efectul masei firului asupra tensiunii din fir avem:

$$T = G_1 = m_1 g \text{ și deci } v_l = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\frac{m}{l}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{960 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m}}{12 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} = 40 \text{ m/s}.$$

b) Fiecare punct de pe fir oscilează forțat cu frecvența impusă de oscilațiile diapazonului. Din $\lambda = vT$ și $\nu T = 1$ avem:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \simeq \frac{40 \text{ m/s}}{40 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10^2 \text{ s}^{-1} = 10^2 \text{ Hz}.$$

c) Masa corpului suspendat este acum $m_1' = 2m_1$ și viteza de propagare a undei transversale va fi $v_t' = \sqrt{\frac{T'}{\mu}}$. Raportul vitezelor de propagare este:

$$\frac{v_t'}{v_t} = \sqrt{\frac{T'}{T}} = \sqrt{\frac{m_1'}{m_1}} = \sqrt{2}.$$

2. Un muncitor de la calea ferată lovește cu ciocanul capătul unei șine. Sunetul transmis prin șină este auzit după 0,20 s de un al doilea muncitor care ascultă cu urechea pe șină. Se cere să se determine distanța dintre cei doi muncitori știind că șina este din oțel cu $\rho = 7\,800$ kg/m³ și modulul de elasticitate este $E = 20 \cdot 10^{10}$ N/m².

Rezolvare. Dacă se cunoaște viteza v_l de propagare a perturbației pe care o vom considera că se transmite sub forma unei unde lungitudinale atunci distanța poate fi determinată din relația $d = v_l t$:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2}{78\,000 \text{ kg/m}^3}} = 5{,}06 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

$$d = v_l t = 5{,}06 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ s} = 1\,012 \text{ m}.$$

10.4.5. **Intensitatea undei.** Să considerăm, într-un mediu elastic omogen și izotrop, o sursă de oscilație care transferă continuu aceeași energie în unitate de timp. Sursa are, deci, o putere constantă. Dacă E este energia emisă în timpul t de mulțimea punctelor ce alcătuiesc sursa atunci relația

$$P = \frac{E}{t} = \Phi \tag{10.24}$$

definește *puterea emisă de sursă* sau fluxul de energie emis, mărime măsurată în watt. Energia emisă de sursă este transferată în întreg mediul. Raportul dintre fluxul de energie P și aria S a unei suprafețe perpendiculare pe direcția de propagare prin care are loc transferul de energie

$$I = \frac{P}{S} \tag{10.25}$$

definește densitatea de flux de energie sau *intensitatea* I a undei, mărime care în S.I. se măsoară în W/m².

Deoarece energia transferată printr-o porțiune a unei suprafețe de undă este suma energiilor tuturor oscilatorilor de pe această suprafață de undă și pentru că energia unui oscilator armonic este proporțională cu A^2 (pătratul amplitudinii) rezultă că densitatea fluxului de energie este direct proporțională cu pătratul amplitudinii oscilatorilor de pe această suprafață de undă

$$I \sim A^2. \tag{10.26}$$

Observație importantă!

Proprietatea cea mai importantă a unei unde este aceea de a transfera „energie". Transportul de „energie" are loc fără transport de substanță!

10.5. ECUAȚIA UNDEI PLANE

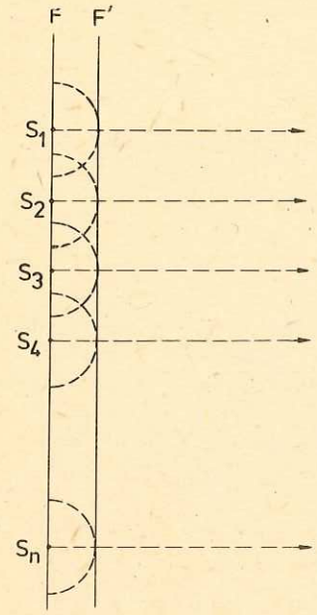


Fig. 10.29. Undă plană generată de mai multe surse de oscilație situate în același plan.

Ne propunem să stabilim care este expresia funcției $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ pentru un caz concret: unda plană.

Știm că acest tip de undă se caracterizează prin faptul că suprafețele de egală fază sînt plane, adică sînt suprafețe care se închid la infinit. Avem de-a face, evident, cu o idealizare. O suprafață de egală fază poate fi considerată plană pe o porțiune mică, dacă este mult depărtată de sursa de oscilație. Se mai pot obține însă unde plane și altfel, anume folosind un număr mare de surse de oscilație dispuse pe un plan și care sînt în fază. Undele produse de aceste centre, separat, se compun și rezultatul este o undă plană (fig. 10.29).

Indiferent de modul de obținere, undele plane sînt caracterizate de faptul că amplitudinile oscilațiilor tuturor punctelor mediului sînt aceleași. Acest fapt este o consecință a legii conservării energiei: energia unui plan de oscilatori este preluată de un plan similar (același număr de particule) și prin urmare energia repartizată unui oscilator va fi aceeași (mediul de propagare este presupus nedisipativ). Cum energia de oscilație este proporțională cu puterea a doua a amplitudinii, A^2, consecința apare evidentă.

Să reluăm în discuție modelul lanț de resorturi și bile. Acest model este suficient pentru studiul undei plane întrucît ne putem imagina o mulțime de lanțuri avînd bilele în plane paralele între ele și perpendiculare pe resorturi. Dacă toate lanțurile sînt perturbate simultan și identic, vom obține o undă plană care se propagă prin sistemul lor. Cum fiecare lanț se comportă la fel ca celelalte este suficient să studiem numai unul, pentru a obține informații despre întreg sistemul.

Vom presupune că perturbația externă este armonică, adică elongația bilei *1* va fi o funcție de forma $u_1 = A \sin \omega t$. Oscilațiile sînt presupuse paralele sau perpendiculare pe lanț. Pulsația perturbației se presupune a fi egală cu pulsațiile proprii ale bilelor; se presupune deci existența unui cuplaj strîns, a unui transfer optim de energie.

Cum depinde elongația unei bile oarecare n din lanț de timpul de propagare de la sursa de oscilație și de distanța față de sursă?

Bila n va intra în oscilație mai tîrziu decît bila *1* și deci între cele două bile va exista un defazaj φ. Cum forțele care acționează asupra bilei n sînt

forțe elastice, oscilația sa va fi tot armonică și, unda fiind plană, amplitudinea va fi aceeași. Deci elongația bilei n va fi de forma:

$$u = A \sin (\omega t + \varphi) = A \sin \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right). \tag{10.27}$$

Defazajul dintre cele două bile se datorează intrării mai tîrziu în oscilație a bilei n față de bila *1*, adică timpului τ necesar undei să parcurgă distanța x de la bila *1* la bila n : $\tau = \frac{x}{v_f}$. Deci putem scrie acum

$$u = A \sin \omega(t - \tau). \tag{10.28}$$

Așadar bila n începe să oscileze cu o întîrziere τ față de bila *1* (momentul inițial fiind acela în care este aplicată perturbația). Adică, la momentul t, bila n are aceeași elongație pe care o avea bila *1* la momentul $(t - \tau)$, deci mai devreme. Înlocuind pe τ rezultă

$$u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_f}\right) = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{v_f}\right)$$

dar cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$ și $v_f = \frac{\lambda}{T}$ rezultă:

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{10.29}$$

Relația (10.29) reprezintă așa-numita *ecuație a undei plane* sau legea de mișcare a undei.

Observație. Dacă m este un număr întreg, păstrînd x constant și punînd în loc de $t \to t + mT$ rezultă:

$$u(t + mT,\ x) = A \sin\ 2\pi \left(\frac{t + mT}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin\ 2\pi \left(\frac{t}{T} + m - \frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi m\right] = A \sin\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = u(t, x),$$

adică funcția are perioada T.

Păstrînd t constant avem $u(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$$u(x + m\lambda, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + m\lambda}{\lambda}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - m\right) =$$

$$= A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi m\right] = A \sin\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = u(x, t).$$

Rezultă că: $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ este periodică atît în timp (cu perioada T) cît și în spațiu (cu perioada λ). În acest fel unda trebuie concepută în două privințe ca un proces periodic. Perioada temporală este perioada de oscilație T, „perioada" spațială este lungimea de undă λ.

O undă este un fenomen periodic în timp și spațiu.

Relația (10.29) ne permite să exprimăm defazajul dintre doi oscilatori aflați la distanța x_1 respectiv x_2 de o sursă de oscilație, pe aceeași rază de undă, la același moment t. Într-adevăr dacă

$$u_1 = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \text{ și } u_2 = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

reprezintă elongațiile celor doi oscilatori, atunci defazajul este:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2).$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \tag{10.30}$$

Dacă Δx, diferența de drum dintre cei doi oscilatori, respectiv dintre suprafețele de undă cărora aparțin, este de forma $2k\frac{\lambda}{2}$, $\left(\text{un număr par de } \frac{\lambda}{2}\right)$, atunci $\Delta\varphi$, defazajul, este $2k\pi$ și cei doi oscilatori, suprafețele lor de undă, sînt în fază.

În cazul în care $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, $\left(\text{număr impar de } \frac{\lambda}{2}\right)$, atunci defazajul $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ și cei doi oscilatori sînt în opoziție de fază.

Exercițiu. O sursă de unde plane oscilează după ecuația $u = 3 \cdot 10^{-1} \sin \frac{\pi}{9} t$. Dacă viteza de propagare a undelor este de 2 m/s: *a)* să se scrie ecuația undei; *b)* să se afle diferența de fază între oscilațiile a două puncte M și N aflate la distanța de 3 m respectiv de 4 m de sursă.

Rezolvare. a) Ecuația undei plane este

$$u = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Comparînd legea de oscilație a sursei cu relația $u = A \sin(\omega t + \varphi)$ observăm că $\omega = \frac{\pi}{9}$ rad/s, de unde $T = \frac{2\pi}{\omega} = 18$ s, ceea ce permite calcularea lungimii de undă: $\lambda = vT = 2$ m/s $\cdot$ 18 s $= 36$ m. Putem scrie acum ecuația undei plane:

$$u = 3 \cdot 10^{-1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{18} - \frac{x}{36}\right).$$

b) Punctele M și N oscilează după legile

$u_M = 3 \cdot 10^{-1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{18} - \frac{3}{36}\right)$, $u_N = 3 \cdot 10^{-1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{18} - \frac{4}{36}\right)$, diferența de fază este deci $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{18} - \frac{3}{36}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{18} - \frac{4}{36}\right) = \frac{\pi}{18}$ rad.

10.6. CLASIFICAREA UNDELOR ELASTICE DUPĂ FRECVENȚĂ

Am reținut din paragrafele anterioare că undele care se formează în mediile elastice se numesc unde elastice. Considerînd că izvorul de perturbație este un oscilator armonic, adică un oscilator sinusoidal, atunci și undele care se transmit în mediile elastice sînt sinusoidale. Dacă astfel de unde provin de la izvoare de oscilație, a căror frecvență este cuprinsă în intervalul 16 Hz — 20 000 Hz, deci care pot produce senzația de sunet, ele se numesc unde sonore sau *sunete*. Oscilațiile, respectiv undele, a căror frecvență este situată între 20 k Hz și 100 GHz se numesc *ultrasunete*, iar cele cu frecvențe sub 16 Hz *infrasunete*.

În ultimii ani au început studii sistematice asupra producerii, propagării și absorbției infrasunetelor datorită constatării că acestea au o mare influență asupra organismelor vii. Această influență se datorește faptului că ritmurile specifice organismelor vii se produc cu frecvențe infrasonore și deci transferul de energie dintre un infrasunet și un organism viu devine important (la rezonanță).

O categorie aparte de unde elastice o constituie undele seismice. La adîncimi de ordinul sutelor de kilometri în interiorul globului pămîntesc, se acumulează, în timp, tensiuni foarte mari datorită cărora se produc brusc rupturi și deplasări care se resimt sub forma unor perturbații violente, numite cutremure. Regiunea din interiorul Pămîntului în care se produce mișcarea se numește focar sau hipocentru, iar locul de la suprafață aflat pe verticala locului se numește epicentru. Mediul alcătuit din roci cu proprietăți elastice însemnate face posibilă transmiterea perturbației sub forma unei unde, unda seismică. Unda seismică constă din: unda seismică transversală și unda seismică longitudinală. Frecvența undelor seismice este cuprinsă în intervalul 10—25 Hz.

10.7. CONDIȚII DE AUDIBILITATE A OSCILAȚIILOR ELASTICE

Senzația de sunet se datorește punerii în vibrație, în anumite condiții, a terminațiilor nervului auditiv, prin intermediul diferitelor organe ale urechii.

Pentru a fi percepute ca sunete, oscilațiile din mediile elastice (apă, aer, lemn sau oțel) care ajung la ureche, trebuie să îndeplinească anumite condiții de frecvență și de intensitate.

Știm că frecvențele oscilațiilor sonore (sunetele) sînt cuprinse între 16 Hz și 20 000 Hz. Aceste limite sînt diferite de la individ la individ, în mod deosebit limita superioară (care pentru același individ scade cu vîrsta).

În ceea ce privește intensitatea sunetului ea trebuie să fie cuprinsă, de asemenea, între anumite limite. Spre intensitățile slabe există un prag sub care sunetele nu mai pot fi percepute, $I_{min} = 10^{-12}$ W/m² (la $\nu = 1$ kHz), iar spre intensitățile mari există o limită peste care senzația auditivă se

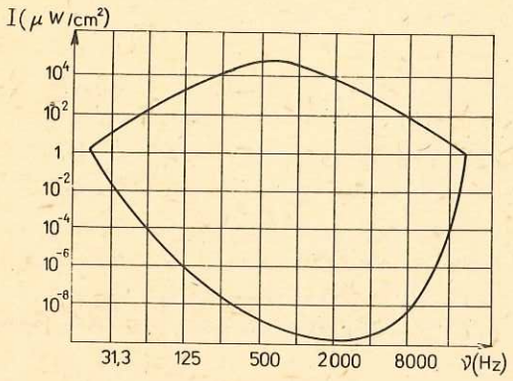


Fig. 10.30. Limitele de audibilitate.

transformă în senzaţie de durere, $I_s = 10^2$ W/m² (la $\nu = 1$ kHz). În figura 10.30 s-au trasat, aproximativ, limitele inferioară şi superioară de intensitate audibilă pentru diferite frecvenţe. Se poate observa că lărgimea suprafeţei intensităţilor audibile variază cu frecvenţa, îngustîndu-se spre frecvenţe foarte joase şi foarte înalte, atingînd valoarea cea mai mare în jurul frecvenţei $\nu = 1\,000$ Hz.

În afară de limitele de frecvenţă şi de intensitate se mai impune undelor sonore şi o limită de durată. Pentru ca o oscilaţie elastică, care se află între limitele audibile de frecvenţă şi intensitate, să poată fi percepută ca sunet, ea trebuie să dureze un timp minim. Pentru un observator standard (mediu) această durată este de cel puţin $\frac{1}{100}$ s. Dacă timpul este mai mic decît cel limită, oscilaţia elastică este percepută sub formă de pocnet.

10.8. REFLEXIA ŞI REFRACŢIA UNDELOR

10.8.1. **Undă reflectată, undă refractată.** Să presupunem că avem două medii în contact adică, pe o anumită suprafaţă, particulele unuia dintre ele interacţionează cu particulele celuilalt. Să notăm cele două medii cu A şi B şi să presupunem că prin mediul A se propagă o undă către suprafaţa de separare (a, b) (fig. 10.31). În momentul în care unda ajunge la particulele de mediul A, situate pe suprafaţa (a, b), acestea încep să oscileze. Cum particulele mediului B, aflate pe suprafaţa de contact, sînt în interacţiune cu cele

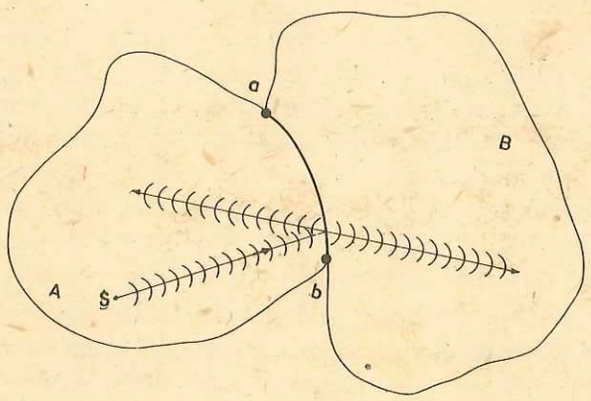


Fig. 10.31. Reflexia şi refracţia unei unde elastice.

ale mediului A, rezultă că oscilaţiile se vor transmite mai departe în mediul B şi odată cu ele şi o parte din energia iniţială.

Oscilatorii din mediul A, de pe suprafaţa de separare (a, b), după ce au pus în stare de oscilaţie particulele mediului B, vor continua să oscileze însă cu amplitudini mai mici. Aceşti oscilatori devin surse pentru o undă care se va propaga tot prin mediul A, dar care va fi diferită de cea iniţială. (Energia transportată de această nouă undă va fi diferenţa dintre energia iniţială şi energia transferată mediului B.)

Unda care ia naştere în mediul B se numeşte undă transmisă sau *undă refractată*, iar cea care se formează în mediul A, *undă reflectată*.

Cum se propagă cele două unde? Cum se pot determina noile direcţii de propagare?

Principiul lui Huygens enunţat, acum, pentru cazul general ne va ajuta să obţinem răspuns la întrebările puse.

Fie o undă care se propagă printr-un mediu; dacă la un anumit moment t se înlocuieşte frontul ei de undă cu o mulţime de oscilatori, ce constituie fiecare o sursă pentru cîte o undă sferică (undă secundară sau elementară) care se propagă înainte, atunci frontul undei principale la un moment ulterior $t + \Delta t$ este suprafaţa tangentă (înfăşurătoarea) la fronturile undelor elementare (la momentul Δt de la generarea lor).

O altă formulare a principiului lui Huygens este următoarea:

Orice punct de pe o suprafaţă de undă poate fi considerat ca un nou centru de perturbaţie de la care se propagă înainte unde sferice secundare (elementare).

Figura 10.32, a şi b ilustrează construirea frontului de undă cu ajutorul principiului lui Huygens: *a)* pentru unde circulare şi b) pentru unde liniare.

Se poate ilustra principiul lui Huygens prin undele superficiale de la suprafaţa unui lichid, folosind aparatul de produs unde (fig. 10.33 , a). Un vibrator produce perturbaţia stratului superficial de apă din cuva C şi generează unde circulare pe suprafaţa apei (fig. 10.33, b). Dacă aşezăm pe apă un cilindru de tablă cu multe fante înguste practicate de-a lungul generatoarei

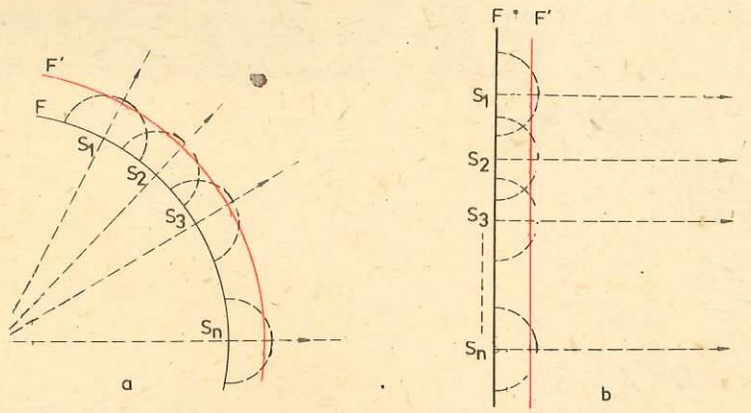


Fig. 10.32. Principiul lui Huygens. Construirea fronturilor de undă pentru unde circulare (a) şi unde liniare (b).

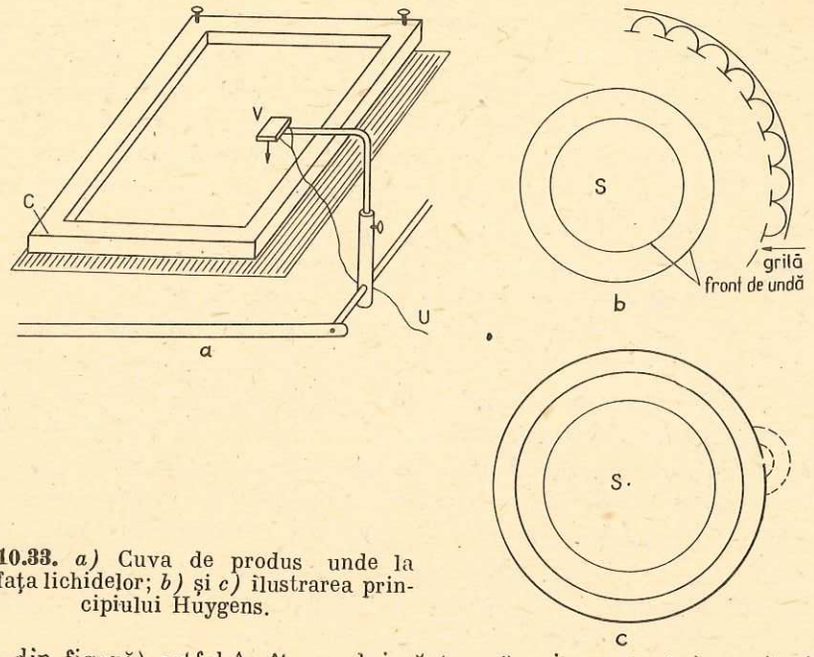
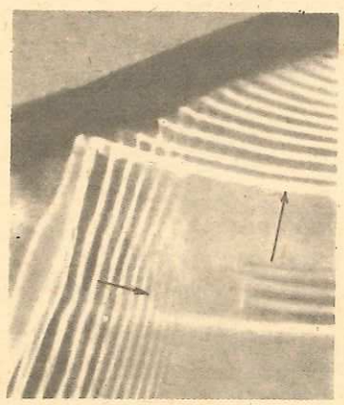


Fig. 10.33. *a)* Cuva de produs unde la suprafața lichidelor; *b)* și *c)* ilustrarea principiului Huygens.

(grila din figură) astfel încît axa lui să treacă prin centrul de oscilație, vom observa că frontul circular al undei se reface dincolo de cilindru. Dacă închidem toate fantele cu excepția uneia, vom observa unde circulare care se propagă înainte din această fantă și care se comportă ca un nou centru de oscilație (fig. 10.33, *c*).

10.8.2. **Reflexia și refracția undelor superficiale.** *a) Reflexia.* În cuva aparatului de produs unde se produc unde liniare. Așezînd un obstacol în calea undelor, se observă fenomenul de reflexie, undele emise de izvorul de oscilație revenind în mediul în care s-au propagat la incidența cu obstacolul (peretele) P care constituie un mediu cu alte caracteristici decît mediul inițial (fig. 10.34, *a*).

De observat că direcția de propagare SI a undei incidente se schimbă devenind IR (fig. 10. 34, *b*). Se construiește perpendiculara NI pe peretele P



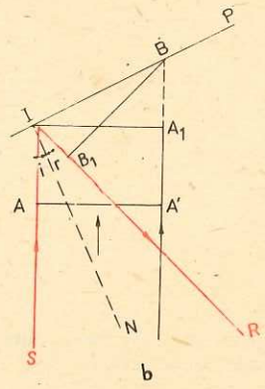


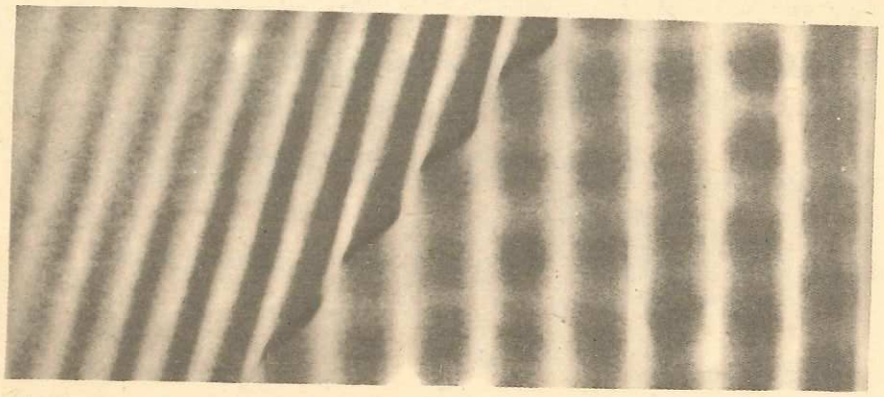
Fig. 10.34. Reflexia undelor: *a)* fotografie în cuvă; *b)* schema geometrică corespunzătoare situației din *a)*.

în punctul de incidență I. Unghiul $\widehat{SIN} = \hat{i}$ se numește *unghi de incidență* iar unghiul $\widehat{NIR} = r$ se numește *unghi de reflexie.*

b) Refracția. La același aparat, modificînd adîncimea unei părți din apă prin așezarea pe fundul cuvei a unei plăci, schimbăm caracteristicile mediului (viteza undelor în regiunea mai puțin adîncă este mai mică). Fotografia din figura 10.35, *a* arată cum se schimbă direcția undei incidente la trecerea în alt mediu. Direcția SI, după trecerea liniei care separă cele două regiuni, devine IR (fig. 10.35, *b*).

Schimbarea direcției de propagare a undei la suprafața de separare între două regiuni în care vitezele de propagare sînt diferite, o numim refracție. Unghiul r se numește unghi de refracție. Se observă, în cazul dat, că unghiul de refracție este mai mic decît unghiul de incidență.

10.8.3. **Legile reflexiei și refracției.** *a) Legea reflexiei.* Să considerăm o porțiune a frontului de undă plan AA' care avansează cu viteza v pe direcția SI către suprafața de separare P pe care o atinge la un moment dat t (fig. 10.34, *b*). La un anumit moment poziția frontului de undă este IA_1 și de la fiecare punct al frontului care va atinge suprafața P vor pleca unde elementare care conform principiului lui Huygens se vor propaga în același mediu.



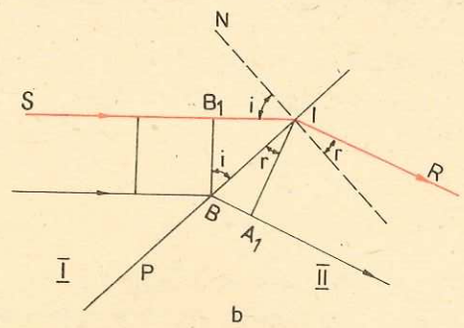


Fig. 10.35. Refracția undelor: *a)* fotografie în cuvă; *b)* schema geometrică corespunzătoare situației din *a)*.

În intervalul de timp Δt, începînd cu momentul t și sfîrșind cu momentul $(t + \Delta t)$, moment la care punctele frontului de undă IA_1 au luat contact cu peretele, undele elementare produse succesiv de toate punctele dintre I și B se propagă de la perete înapoi în mediul din care au venit. Suprafața tangentă fronturilor de undă ale tuturor acestor unde elementare (înfășurătoarea) formează noul front de undă B_1B care se deplasează pe direcția IR. Se observă că triunghiurile dreptunghice IA_1B și BB_1I sînt egale avînd IB latura comună și $A_1B = IB_1 = v\Delta t$. Rezultă că $\sphericalangle A_1IB = \sphericalangle B_1BI$ sau

$$\hat{i} = \hat{r}. \tag{10.31}$$

Deci, la reflexie, unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.

b) Legea refracției. Porțiunea BB_1 a frontului de undă incident avansează cu viteza v_1 pe direcția SI spre suprafața de separare P pe care o atinge în B la momentul t și în I la momentul $(t + \Delta t)$ (fig. 10.35, *b*). În intervalul Δt, succesiv, din toate punctele situate între B și I, se propagă unde elementare cu viteza $v_2 \neq v_1$. Tangenta tuturor fronturilor acestor unde formează frontul undei refractate care la momentul $(t + \Delta t)$ ocupă poziția A_1I. Din triunghiurile BB_1I și BA_1I, triunghiuri dreptunghice, putem scrie:

$$\sin \widehat{B_1BI} = \frac{B_1I}{BI} = \frac{v_1 \Delta t}{BI} \text{ și } \sin \widehat{BIA_1} = \frac{BA_1}{BI} = \frac{v_2 \Delta t}{BI}.$$

Dacă facem raportul $\dfrac{\sin \widehat{B_1BI}}{\sin \widehat{BIA_1}}$ și observăm că: $\widehat{B_1BI} = \hat{i}$ (unghiul de incidență) iar $\widehat{BIA_1} = \hat{r}$ (unghiul de refracție) obținem legea refracției:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}. \tag{10.32}$$

Raportul $\dfrac{v_1}{v_2} = n_{21}$ se numește indice de refracție al mediului *2* față de mediul *1*.

Știind că $\lambda = vT$ putem scrie: $\lambda_1 = v_1T$, respectiv $\lambda_2 = v_2T$, lungimile de undă ale undelor care se propagă în cele două medii. Relația (10.32) poate fi scrisă:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{10.33}$$

Exercițiu. Undele produse într-o cuvă cu apă trec dintr-o regiune mai puțin adîncă în una mai adîncă și se refractă. Știind că unghiul de incidență este de 19° iar cel de refracție de 30° să se afle: *a)* raportul vitezelor în cele două regiuni; *b)* raportul lungimilor de undă din cele două regiuni.

Rezolvare. a) Din legea refracției $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{v_1}{v_2}$ înlocuind cu datele din enunț avem: $\dfrac{\sin 19°}{\sin 30°} = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{2}{3}$. *b)* Din relația (10.33) putem scrie $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{2}{3}$.

10.8.4. Reflexie cu schimbare de sens

EXPERIMENT

Se produce o perturbație transversală, puternică (un șoc) pe o coardă sau pe un tub de cauciuc al cărui capăt este lăsat mobil cu ajutorul unei sfori sau inel (fig. 10.36, *a*), sau este fix (fig. 10.36,*b*). Se observă, de-a lungul corzii, propagarea unei „creste" de undă spre capătul ei. În cazul *a*) ea se întoarce cu deviere în aceeași parte adică tot ca o creastă. În cazul *b)* unda se întoarce ca o „depresiune" (adîncitură).

În ambele cazuri, perturbația este reflectată la capătul corzii (ca la întîlnirea cu un perete — obstacol), dar felul reflexiei depinde de faptul dacă capătul corzii poate oscila liber transversal, numindu-l în acest caz capăt liber, sau dacă la capăt nu poate apărea nici o oscilație, numindu-l capăt fix.

Așadar „creasta" unei unde transversale se reflectă (se întoarce) la capătul liber ca o „creastă" de undă, iar la capătul fix ca o „depresiune" de undă.

Unda suferă la capătul fix un salt de fază egal cu π sau o „pierdere" de $\dfrac{\lambda}{2}$ pentru că după reflexie toate punctele vor oscila de cealaltă parte a tubului (corzii), față de unda incidentă.

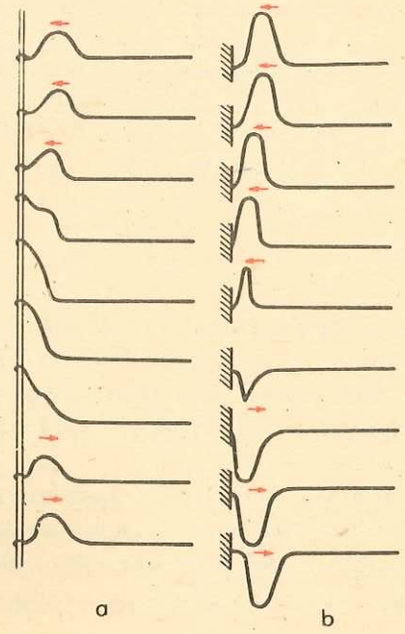


Fig. 10.36. Reflexia unei perturbații care se propagă pe o coardă (desenele sînt distanțate uniform în timp). *a)* La capătul liber faza nu se schimbă, după reflexie; *b)* prin reflexie la capătul fix se schimbă faza cu 180°.

O undă transversală se reflectă la capătul liber fără schimbare de fază, iar la capătul fix cu o schimbare de fază de π sau o „pierdere" de $\frac{\lambda}{2}$.

Concluzii identice se obţin dacă se analizează reflexia unei unde longitudinale.

10.9. DIFRACŢIA

Ce se întîmplă atunci cînd undele care se propagă într-un mediu oarecare întîlnesc obstacole de dimensiuni comparabile cu lungimea de undă?

EXPERIMENT

În calea unor unde plane produse pe suprafaţa apei, în cuva de producere a undelor, se aşază succesiv obstacole liniare de diferite dimensiuni (fig. 10.37, *a*, *b*, *c*) sau se lasă să treacă undele prin deschideri (fante) diferite (fig. 10.37, *d*, *e*, *f*).

În primul caz observăm că undele pătrund cu atît mai mult în „spaţiul umbrei" geometrice din spatele obstacolului cu cît dimensiunile obstacolului devin mai mici. Şi în al doilea caz se observă că regiunea în care se propagă unda în zona de „umbră" este cu atît mai mare cu cît deschiderea este mai mică.

Abaterea unei unde de la direcţia iniţială de propagare la trecerea pe lîngă obstacole şi la traversarea fantelor se numeşte difracţie.

Observaţie. Difracţia este un fenomen distinct de cel de refracţie. Refracţia apare la trecerea unei unde dintr-un mediu în altul cu viteze diferite de propagare; difracţia apare la propagarea undei în acelaşi mediu fără schimbarea vitezei de propagare.

EXPERIMENT

Să repetăm experimentele de mai sus cu unde a căror lungime de undă diferă mult faţă de dimensiunile fantelor (obstacolelor). Figura 10.38 ilustrează efectul unei fante asupra unor unde cu lungimea de undă mult mai mică decît deschiderea sa, respectiv cu lungimea de undă comparabilă cu dimensiunea fantei.

Experienţa arată că factorul determinant pentru fenomenele de difracţie este raportul dintre lungimea de undă şi dimensiunea obstacolului difractant. Difracţia este deosebit de pronunţată atunci cînd dimensiunile obstacolelor difractante sînt comparabile cu lungimea de undă.

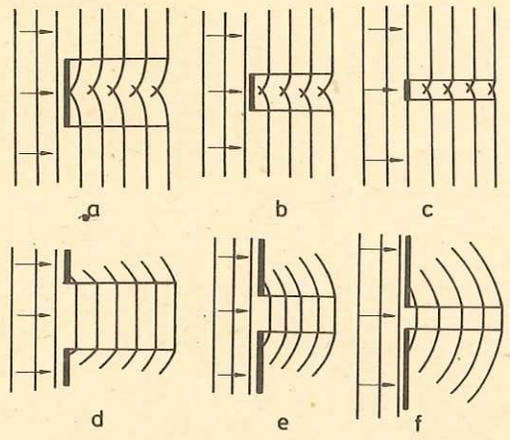


Fig. 10.37. Difracţia undelor pe obstacole şi fante de diferite lăţimi.

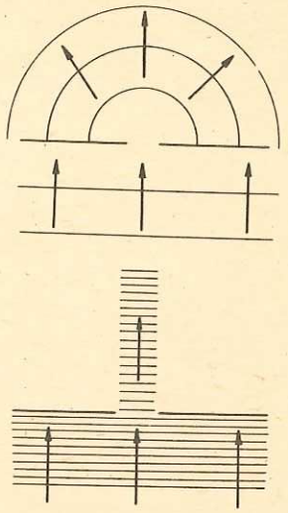


Fig. 10.38. Efectul unui orificiu asupra unor unde cu lungimea de undă mult mai mică decît orificiul, respectiv cu lungimea de undă comparabilă cu dimensiunile orificiului.

Fenomenul de difracţie poate fi explicat pe baza principiului lui Huygens. Se consideră frontul de undă care a atins obstacolul ca fiind format dintr-o mulţime de centre (surse) noi de oscilaţii de la care pleacă unde elementare (fig. 10.37). În figura 10.37, *f* se observă formarea unei unde elementare individuale; are loc o difracţie pronunţată.

10.10. INTERFERENŢA. UNDE STAŢIONARE

10.10. 1. **Interferenţa undelor**

EXPERIMENT

La capetele unei corzi (tub de cauciuc, lanţ de resorturi), se produc, printr-o perturbaţie, două creste de unde, ambele de aceeaşi parte sau una de o parte şi alta de cealaltă parte a corzii (fig. 10.39, *a*, *b*).

Se observă că ambele creste de undă se deplasează de-a lungul corzii nestingherite atît înainte cît şi după ce se întîlnesc. În locul în care crestele de undă se întîlnesc apare o creastă vizibilă mai înaltă (fig. 10.39, *a*) sau deformarea dispare complet (fig. 10.39, *b*). Experimentul poate fi realizat şi cu

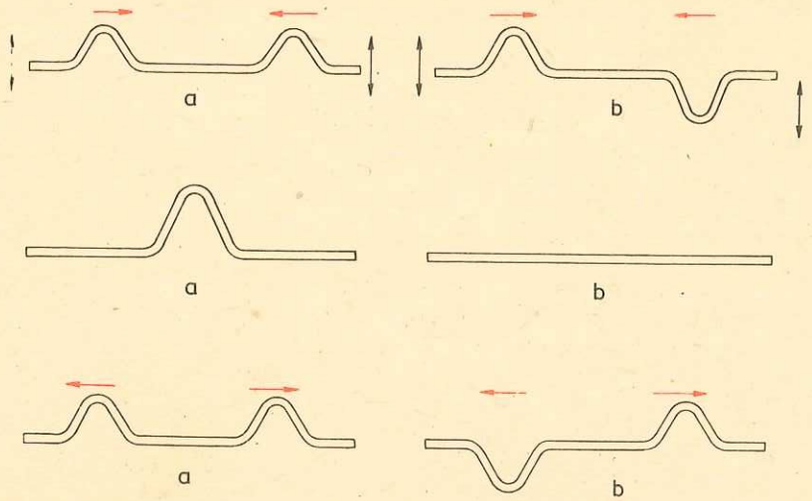


Fig. 10.39. Suprapunerea a două perturbații: *a)* cu aceeași fază; *b)* cu fază opusă.

ajutorul lanțului de pendule. În acest caz, în momentul întîlnirii perturbațiilor, unul din pendule deviază mult mai mult decît celelalte (*a*) sau abia se mișcă (*b*).

Ne întîlnim aici cu o situație deosebită, caracteristică propagării undelor. Peste unul și același lanț de oscilatori pot trece în același timp perturbații diferite, provenite de la două unde, fără ca undele care se produc pe lanțul (mediul) de oscilatori să se perturbe una pe alta. În locul în care cele două unde se întîlnesc ele se suprapun într-un mod foarte simplu: *amplitudinile oscilațiilor produse de cele două unde se adună (algebric).*

Faptul că după întîlnire undele trec mai departe complet neschimbate, iar în timpul întîlnirii amplitudinile lor se adună, poartă denumirea de suprapunere neperturbată sau de principiul superpoziției neperturbate a undelor.

O importanță deosebită o prezintă cazul în care undele care se întîlnesc au aceeași lungime de undă și determină oscilații de aceeași frecvență (pulsație), unde denumite coerente.

Suprapunerea (compunerea) neperturbată în același loc, dintr-un mediu, a două sau mai multe unde de aceeași lungime de undă sau aceeași pulsație se numește interferență.

Pentru fenomenul de interferență a două unde care se propagă pe aceeași direcție este importantă diferența de drum dintre cele două oscilații care se suprapun în același loc. În figura 10.40, *a*, diferența de drum Δx dintre oscilațiile produse de cele două unde este nulă și deci oscilațiile provocate de ambele

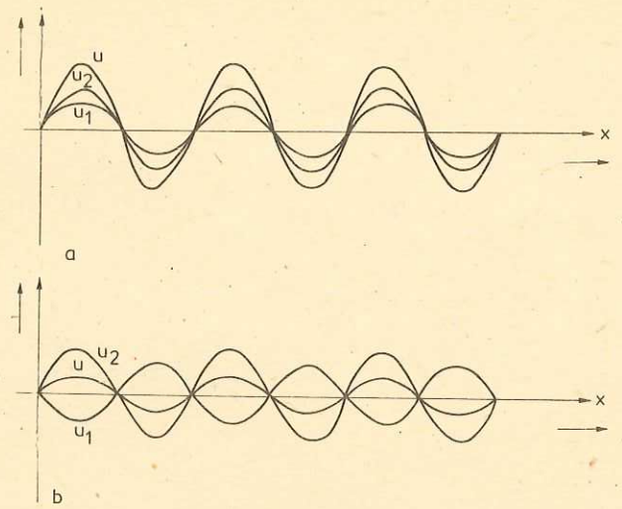


Fig. 10.40. Interferența a două unde cu aceeași lungime de undă: *a)* cînd diferența de drum este nulă și *b)* cînd diferența de drum este de o jumătate de lungime de undă.

unde sînt în fiecare punct de întîlnire, în fază. Cele două unde se „întăresc" una pe alta, oscilația rezultantă se face cu amplitudine maximă. În figura 10.40, *b* diferența de drum dintre oscilațiile produse de cele două unde este $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$. Oscilațiile produse de cele două unde, într-un anumit punct, vor prezenta o diferență de fază $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$. Cele două unde se „slăbesc" reciproc, amplitudinea oscilației rezultante este minimă. Dacă amplitudinile undelor sînt egale, oscilația rezultantă este nulă, cele două unde se „sting" complet una pe alta.

Observație. Două unde care interferă, se intensifică sau se slăbesc la maximum într-un anumit punct, cînd diferența de drum este zero sau $\frac{\lambda}{2}$. Pentru amplitudini egale ele se anulează complet dacă $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$.

Dacă ținem seama de relația (10.30) se observă că la interferență avem:

a) amplificare maximă, cînd diferența de drum $\Delta x = k\lambda = \frac{2k\lambda}{2}$ este un număr par de $\frac{\lambda}{2}$. Din $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ rezultă că pentru $\Delta x = k\lambda$ avem $\Delta\varphi = 2k\pi (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Deci un maxim de oscilație corespunde unei diferențe de drum de forma $2k\frac{\lambda}{2}$ sau unei diferențe de fază de $2k\pi$;

b) atenuare maximă, cînd diferența de drum $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$. În acest caz rezultă pentru $\Delta\varphi$ condiția $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$. Adică atenuarea maximă a două unde corespunde unei diferențe de drum de forma $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ sau unei diferențe de fază de forma $(2k+1)\pi$.

Zona în care se produce suprapunerea undelor se numește cîmp de interferență. Să considerăm un punct P din zona de interferență a undelor plane care provin de la două centre de oscilații C_1 și C_2, care au aceleași pulsații (fig. 10.41). Vom presupune că oscilațiile care ajung în punctul P sînt oscilații armonice și au elongațiile paralele de forma:

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right),$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Punctul P va descrie o mișcare rezultată din compunerea celor două oscilații și după cum se știe de la compunerea oscilațiilor paralele și de aceeași pulsație această mișcare este oscilatorie armonică. Amplitudinea mișcării rezultante este dată de relația:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi.$$

Dar cum $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$, avem pentru amplitudinea oscilației rezultante:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)\right]. \qquad (10.34)$$

Rezultă că amplitudinea oscilației în punctul P depinde de amplitudinile oscilațiilor care se suprapun și de diferența de drum $\Delta x = x_2 - x_1$ dintre oscilații în punctul de interferență.

În ipoteza că propagarea oscilațiilor se face într-un mediu în care nu există amortizare, amplitudinea oscilației rezultante va depinde numai de diferența de drum Δx dintre cele două oscilații.

În situația în care această diferență de drum este constantă și amplitudinea oscilației rezultante din punctul P este constantă.

Interferența în care toate punctele din cîmpul de interferență oscilează cu o amplitudine constantă în timp se numește *interferență staționară*.

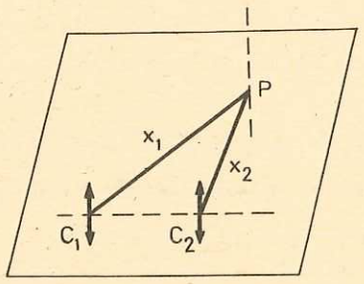


Fig. 10.41. Două centre de oscilație de aceeași pulsație într-un mediu elastic.

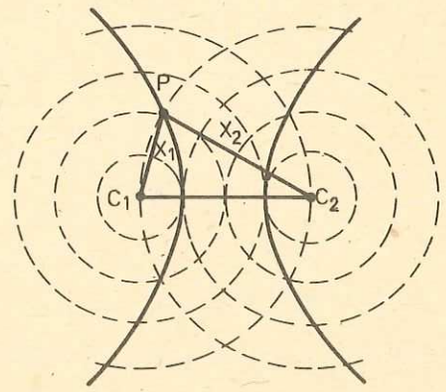


Fig. 10.42. Pentru fiecare valoare a diferenței de drum se obțin două curbe simetrice în raport cu mediatoarea segmentului C_1C_2.

Valoarea amplitudinii oscilației fiecărui punct din cîmpul de interferență depinde de diferența de drum Δx. În zona de interferență există puncte care au aceeași diferență de drum față de cele două centre de oscilații și care au aceeași amplitudine.

Curbele care unesc aceste puncte reprezintă un loc geometric cu proprietatea că diferența de drum față de două puncte fixe este constantă (hiperbolă). Pentru fiecare valoare a diferenței de drum se obțin două curbe simetrice față de mediatoarea segmentului C_1C_2 (fig. 10.42), de egală amplitudine și care se numesc franje de interferență.

După cum s-a afirmat mai înainte, există valori ale diferenței de drum pentru care oscilația rezultantă poate avea amplitudine maximă sau minimă. Aceste valori, ale diferenței de drum, se pot obține din relația (10.34) punînd condițiile:

a) $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 1$, pentru amplitudine maximă $(A = A_1 + A_2)$ sau $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2k\pi$, condiție din care rezultă:

$$x_2 - x_1 = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2};$$

b) $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = -1$, pentru amplitudine minimă $(A = A_1 - A_2)$ sau $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2k+1)\pi$, de unde se obține:

$$x_2 - x_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Așadar toate punctele din cîmpul de interferență pentru care diferența de drum este un număr par de $\frac{\lambda}{2}$, oscilează cu amplitudine maximă $A = A_1 + A_2$, iar cele pentru care diferența de drum este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$, oscilează cu amplitudinea minimă

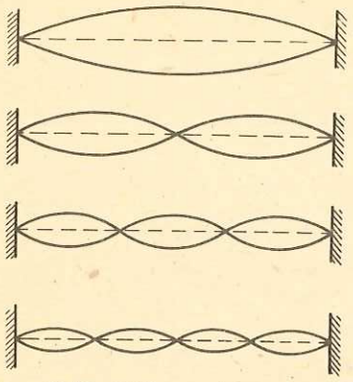


Fig. 10.43. Unde staționare pe un fir întins.

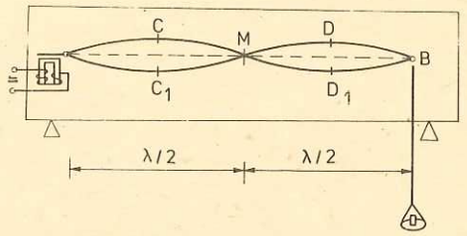


Fig. 10.44. Dispozitiv pentru producerea undelor staționare pe fir.

$A = A_1 - A_2$. Curbele care unesc punctele de maximă și minimă amplitudine se numesc franje de maximă și minimă interferență. Evident pentru cazul particular $A_1 = A_2 = a$ obținem $A = 2a$ pentru amplitudine maximă și $A = 0$ pentru amplitudine minimă.

10.10.2. **Unde staționare.** Să perturbăm o coardă sau un resort elastic lung, provocînd apariția unor unde transversale cu pulsații diferite. Să lăsăm undele să se reflecte la capătul fix sau liber. Se constată că în întregul sistem se produc stări de oscilație caracteristice care nu se „deplasează" în timp ci rămîn pe loc, staționează. Fenomenul se produce datorită suprapunerii undei incidente, produsă de sursa perturbatoare și undei reflectate, la capătul fix sau la cel liber.

Acest caz deosebit de interferență se numește undă staționară. *Unda staționară apare cînd două unde de lungimi de undă egale, care se propagă în sensuri opuse, se suprapun.*

Unda staționară prezintă la distanțe egale cu $\frac{\lambda}{2}$ locuri în care oscilația este stinsă complet, *noduri* de oscilație și între ele locuri în care punctele oscilează cu amplitudine maximă, *ventre* de oscilație.

Dacă în experiențele care pun în evidență undele staționare partea sursei de oscilație se consideră capăt fix atunci figura 10.43 redă cîteva cazuri de formare a undelor staționare pe un fir întins, cînd celălalt capăt este tot fix. Figura 10.44 prezintă aparatul cu care pot fi produse și puse în evidență astfel de unde staționare.

Pentru a explica apariția nodurilor și ventrelor de oscilație să considerăm un punct oarecare P de pe firul întins (fig. 10.45), solicitat simultan de unda incidentă și de unda reflectată. Diferența de drum, dintre aceste două unde, este

$$\Delta x = \left(l + x + \frac{\lambda}{2}\right) - (l - x) = 2x + \frac{\lambda}{2},$$

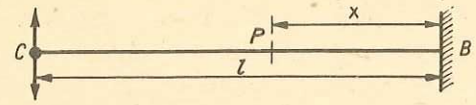


Fig. 10.45. Punctul P de pe fir este antrenat în mișcare atît de unda incidentă cît și de cea reflectată.

unde $\frac{\lambda}{2}$ reprezintă diferența de drum (pierderea) introdusă la reflexia pe capătul fix al firului $\left(\text{reflexie cu pierdere de } \frac{\lambda}{2}\right)$. În ipoteza că firul este un mediu nedisipativ, amplitudinea oscilațiilor rămîne constantă în timp, rezultă că amplitudinea rezultantă este

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi},$$

dar cum $A_1 = A_2 = a$ (unda reflectată are aceeași amplitudine cu cea incidentă) și $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta x$ obținem:

$$A = \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Considerînd cunoscută relația $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ se obține:

$$A = \sqrt{2a^2\left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right)\right]} = \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right)}$$

deci

$$A = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right). \qquad (10.35)$$

Din relația (10.35) observăm că amplitudinea oscilației rezultante este independentă de timp dar variază periodic cu poziția punctului pe fir (cu distanța x față de capătul B al firului din figura 10.45). Toate punctele pentru care $2x + \frac{\lambda}{2} = \frac{2k\lambda}{2}$ oscilează cu amplitudine maximă. Aceste puncte sînt tocmai punctele numite ventre și se află față de punctul de reflexie la distanțele

$$x_v = (2k - 1)\frac{\lambda}{4}, \quad k \geqslant 1 \text{ și întreg.}$$

Punctele pentru care $2x + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, au amplitudinea zero (puncte în repaus), sînt punctele numite noduri și sînt situate față de punctul de reflexie la distanțele

$$x_n = 2k\frac{\lambda}{4} = k\frac{\lambda}{2}, \quad k \geqslant 0 \text{ și întreg.}$$

Poziția nodurilor și ventrelor, pe fir, nu se schimbă: punctele care oscilează cu amplitudine maximă, respectiv minimă (zero), rămîn tot timpul aceleași, de aici și numele de unde staționare.

Pentru cazul firului fixat la cele două capete, reflexia se face cu schimbare de semn pentru elongație $\left(\text{pierdere de } \frac{\lambda}{2}\right)$. În fir se formează unde staționare dacă este îndeplinită condiția $l = n\frac{\lambda}{2}$, adică lungimea firului este egală cu un număr întreg de $\frac{\lambda}{2}$.

10.11. COARDE ȘI TUBURI SONORE

10.11.1. **Proprietățile caracteristice ale unui sunet.** În paragraful 10. 6 au fost denumite sunete undele elastice a căror frecvență este cuprinsă între 16 Hz—20 kHz.

Un sunet perceput de ureche are anumite proprietăți care pot fi explicate prin mărimile fizice caracteristice sunetului și prin particularitățile organului auditiv. Se disting trei proprietăți fizice: înălțimea, intensitatea și timbrul.

a) Înălțimea. Senzația fiziologică de sunet ascuțit (înalt) și de sunet grav (jos) este determinată numai de frecvența undei sonore.

b) Intensitatea auditivă. Senzația fiziologică de intensitate a sunetului se măsoară prin intensitatea auditivă (tăria sunetului). Auzul nu dă pentru două sunete diferite senzații în același raport de tărie ca raportul intensităților lor sonore. Dacă se consideră ca intensitate de referință I_0, pragul minim de audibilitate $I_0 = 10^{-12}$ W/m² (la 1 kHz), atunci se definește (L) nivelul de intensitate sonoră al unui sunet de intensitate I prin relația:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \tag{10.36}$$

Nivelul de intensitate sonoră se măsoară în belli (B) și în decibelli (dB).

c) Timbrul. Un sunet emis de o sursă sonoră (coardă, tub etc.) are un caracter complex. Alături de sunetele principale, numite sunete fundamentale, o sursă sonoră emite simultan și cîteva din armonicile sunetului fundamental. De exemplu, frecvența fundamentală pentru nota la sau armonica I^a este de 440 Hz; *orice multiplu întreg al acestei frecvențe este o armonică superioară.*

Sunetul fundamental și armonicile care-l însoțesc sînt denumite componentele sunetului.

Caracteristica unui sunet care se exprimă prin numărul componentelor care însoțesc sunetul fundamental și nivelul lor de intensitate sonoră se numește timbrul acelui sunet.

10.11.2. **Surse sonore.** Corpurile care pot oscila cu frecvențe între 16 Hz — 20 kHz și care pot genera unde sonore se numesc surse sonore. Printre categoriile de surse sonore importante distingem: *a)* coardele sonore și *b)* tuburile sonore.

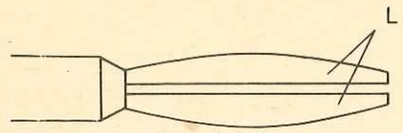


Fig. 10.46. Ancie cu două lame.

a) Coarde sonore. Coarda sonoră este sursa sonoră pentru toate instrumentele de corzi. O coardă sonoră poate fi pusă în oscilație în mod diferit, atît longitudinal cît și transversal. Frecvențele componentelor emise de o coardă sonoră pot fi determinate cu ajutorul relației:

$$\nu_{pr} = n\,\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}},\ n = 1,\ 2,\ 3, \tag{10.37}$$

unde ν_{pr} reprezintă frecvențele proprii ale coardei sonore, care depind de lungimea l a corzii, tensiunea T din coardă și de μ masa unității de lungime a corzii.

b) Tuburi sonore. Tuburile sonore constituie o parte principală a instrumentelor de suflat, avînd rolul de rezonator. Sursa sonoră propriu-zisă o constituie ancia (mușțiucul), reprezentată în figura 10.46, prin intermediul căreia se produc oscilații ale aerului și care formează unde staționare în tubul sonor. Ventrul de oscilație se formează întotdeauna la ancie. În figurile 10.47, *a* și *b* este reprezentat modul în care se formează componentele sunetului în tuburile sonore închise sau deschise.

Se observă că pentru tuburile deschise lungimea l a tubului este un număr întreg de $\frac{\lambda}{2}$:

$$l = n\frac{\lambda}{2},\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \text{ și din } \lambda_n = vT_n = \frac{v}{\nu_n}$$

rezultă

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l}\,n \tag{10.38}$$

relație prin care pot fi obținute componentele sunetului emis de un tub sonor deschis.

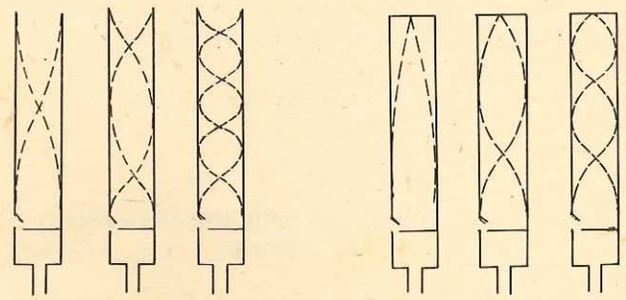


Fig. 10.47. Unde staționare: *a)* în tuburi deschise și *b)* în tuburi închise.

Din condiția $l = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$, pentru tuburile închise, se obține pentru componentele sunetului relația:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4l}(2n - 1). \qquad (10.39)$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Un tub deschis cu lungimea $l = 0{,}5$ m emite oscilații cu lungimea de undă $\lambda = 1$ m. Să se calculeze: *a)* ce armonică produce tubul și ce frecvență are sunetul produs? *b)* Se astupă tubul, (și) se cere lungimea de undă a aceleiași armonici a sunetului emis. Viteza sunetului în aer, $v = 340$ m/s.

Rezolvare. a) În acest caz relația (10.38) ne dă $l = n\frac{\lambda}{2}$ sau $n = \frac{2l}{\lambda} = 1$. Rezultă că este emisă prima armonică (sunetul fundamental) cu frecvența $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{1 \text{ m}} = 340$ Hz.

b) Astupînd tubul, obținem din relația (10.39), $l = (2n - 1)\frac{\lambda_1}{4}$ sau dacă punem $n = 1$, $l = \frac{\lambda_1}{4}$ și $\lambda_1 = 4l = 2$ m. Rezultă $\nu = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{340 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 170$ Hz. În acest caz, sunetul devine mai grav.

2. O coardă de violoncel are o lungime $l = 1$ m. Masa corzii este de 50 g. La ce tensiune este supusă coarda dacă ea trebuie să vibreze la frecvența fundamentală de 66 Hz?

Rezolvare. În cazul sunetului fundamental trebuie îndeplinită condiția $l = \frac{\lambda}{2}$ deci $\lambda = 2$ m și pentru că

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{\lambda}$$

unde $\mu = \frac{m}{l}$ rezultă pentru valoarea tensiunii din coardă:

$$T = \mu \nu^2 \lambda^2 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot 66^2 \text{ Hz}^2 \cdot 4 \text{ m}^2 = 871{,}2 \text{N}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCITII. PROBLEME

1. Se dă relația $a_{max} = \frac{kA}{m}$, unde a_{max} este accelerația maximă a unui oscilator armonic, k constanta elastică, A amplitudinea și m masa oscilatorului. Arătați că această relație are dimensiunile unei accelerații.

2. Două resorturi elastice de constante k_1, k_2 sînt legate o dată în serie, o dată în paralel. Ce condiție trebuie să îndeplinească k_1, k_2 așa încît perioadele de oscilație în cele două cazuri să fie egale?

R: nu este posibil, deoarece $T_s/T_p = (k_1 + k_2)/\sqrt{k_1 k_2} \geqslant 2$.

3. Un punct material oscilează armonic după o lege sinusoidală. Se măsoară elongațiile x_1 și x_2 la momente diferite și se găsește $x_1 = 6$ cm, $x_2 = 4$ cm iar vitezele corespunzătoare sînt $v_1 = 3$ cm/s, $v_2 = 5$ cm/s. Să se determine: *a)* amplitudinea și perioada oscilației armonice; *b)* accelerația maximă.

R: *a)* $A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 6{,}87$ cm; $T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 7{,}025$ s;
b) $a_{max} = 4{,}40$ cm/s².

4. Un bloc cu masa $m = 3{,}62$ kg este suspendat de un resort cu constanta elastică $k = 520$ N/m. Un glonț cu masa $m' = 4{,}5$ g este tras de jos în sus cu o viteză $v = 150$ m/s și se oprește în bloc.
Aproximînd mișcarea sistemului bloc-glonț ca o mișcare oscilatorie armonică, să se afle amplitudinea mișcării.

$$A = \frac{m'g}{k}\sqrt{1 + \frac{k v^2}{(m + m')g^2}} = 1{,}55 \text{ cm}.$$

5. Un corp de masă m cade de la înălțimea h, pe un platan de masă neglijabilă atîrnat de un resort cu constanta elastică k. Știind că după ciocnire corpul rămîne pe platan, să se calculeze amplitudinea mișcării efectuată de sistemul platan-corp.

R: $A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}$.

6. De un dinamometru cu diviziuni între 0 și $F_m = 142$ N și cu lungimea scalei $l = 10$ cm este suspendat un corp care, datorită unei cauze externe, începe să oscileze vertical cu o frecvență $\nu = 2$ oscilații pe secundă. Ce masă are corpul?

R: $k = F_m/l$, $m = k/4\pi^2\nu^2 = 8{,}6$ kg.

7. Un pendul matematic (gravitațional) se fixează de un cadru așezat pe un cărucior. Să se găsească perioada pendulului cînd căruciorul se mișcă; *a)* orizontal cu accelerația a; *b)* vertical în sus cu accelerația a; *c)* vertical în jos cu accelerația $a < g$. Se știu lungimea pendulului l și amplitudinea unghiulară inițială $\alpha_0 \leqslant 5°$.

R: *a)* $2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$; *b)* $2\pi\sqrt{\frac{l}{a + g}}$; *c)* $2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a}}$.

8. Pendulul fixat pe căruciorul de la problema 7 este obligat să se miște cu viteză constantă v pe un cerc de rază R în plan orizontal. Se cere perioada pendulului.

R: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}}}$.

9. Două pendule gravitaționale oscilează în același loc cu frecvențele $\nu_1 = 28$ Hz și $\nu_2 = 7$ Hz. Care este raportul lungimilor lor?

$$\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = 16.$$

10. Cum s-ar putea dovedi experimental că propagarea unei perturbații într-un mediu înseamnă și propagarea — transmiterea de energie?

11. Prin intermediul undelor se transmite energie. Dar impuls se transmite prin unde?

12. Undele de torsiune (forfecare) sînt transversale sau longitudinale?

13. Cum pot fi create unde plane? Dar unde sferice?

14. Dacă mediul este omogen și izotrop, iar sursa de oscilație este punctiformă unda care ia naștere este sferică. Ce fel de undă se va produce, dacă mediul este izotrop dar nu este omogen? Dar dacă este omogen dar nu și izotrop?

15. Undele transversale dintr-o coardă pot fi polarizate. Dar undele sonore sînt polarizate?

16. Dacă două unde interferă, perturbă una din ele propagarea celeilalte?

17. Cînd interferă undele, există o pierdere de energie?

18. Care sînt limitele lungimilor de undă pentru undele sonore în aer? Dar în oțel? Se știe:

$\nu_{min} = 16$ Hz $\qquad v_{aer} = 340$ m/s

$\nu_{max} = 20$ kHz $\qquad v_{oțel} = 5\,000$ m/s.

R: 21,25 m; $17 \cdot 10^{-3}$ m; 312,5 m; $250 \cdot 10^{-3}$ m.

19. O undă sonoră are frecvența de 440 Hz. Care este lungimea de undă a acestui sunet în aer ($v_{aer} = 340$ m/s)? Dar în apă ($v_{apă} = 1\,400$ m/s)?

R: 0,77 m; 3,27 m.

20. Un difuzor are un diametru de 15 cm. La ce frecvență, lungimea de undă a sunetului emis de el, în aer, va fi egală cu diametrul său?

R: $22{,}66 \cdot 10^2$ Hz.

21. O mișcare oscilatorie se propagă sub formă de unde într-un mediu elastic străbătînd în 5 s o distanță de 1 700 m. Cunoscînd lungimea de undă $\lambda = 3{,}4$ m, să se calculeze viteza de propagare a undelor, perioada și frecvența acestora.

R: 340 m/s; 0,01 s; 100 Hz.

22. Să se calculeze lungimea de undă a oscilațiilor cu frecvența de 1,32 kHz știind că acestea se propagă cu viteza de 330 m/s.

R: 0,25 m.

23. Să se calculeze viteza maximă a particulelor mediului prin care se propagă o undă cu frecvența $\nu = 0{,}5$ kHz și cu amplitudinea $A = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ m. Se știe că $\lambda = 0{,}7$ m. Se cere viteza de propagare a undelor în mediul considerat.

R: $v_m = 2\pi\nu A = 7{,}85$ m/s; $\quad v_f = \lambda\nu = 350$ m/s

24. Care este viteza de propagare a undelor transversale într-un fir de cupru cu densitatea relativă $d = 8{,}9$ și secțiunea $S = 1$ mm² întins de o forță $F = 100$ N?

R: $v_t = \sqrt{F/dS} = 106$ m/s.

25. Un fragment de metal este analizat măsurînd viteza sunetului într-o bară făcută din acest metal. Bara are masa de 30 kg și volumul de $2 \cdot 10^{-3}$ m³. Viteza sunetului în bară este de 4 000 m/s. Să se calculeze modulul de elasticitate.

R: $24 \cdot 10^{10}$ N/m².

26. O sursă produce oscilații cu frecvența de 50 Hz care se propagă în două medii diferite. Cunoscînd vitezele de propagare $v_1 = 5\,000$ m/s și $v_2 = 1450$ m/s în cele două medii să se calculeze lungimile de undă corespunzătoare.

R: $\lambda_{1,2} = \dfrac{v_{1,2}}{\nu} = 100$ m; 29 m.

27. Fie $u_1 = 3 \sin 200\,\pi t$ (mm) și $u_2 = 3 \sin \left(200\,\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (mm) ecuațiile care descriu oscilațiile a două surse S_1 și S_2 situate la 6 cm una de alta. Sursele produc oscilații transversale cu elongațiile paralele și care se propagă cu viteza de 80 cm/s pe suprafața unui lichid. Să se determine diferența de fază între mișcările care sosesc în același moment într-un punct situat la distanța d_1 de S_1 și la distanța d_2 de S_2.

R: $200\,\pi \dfrac{d_2 - d_1}{v} - \dfrac{\pi}{3}$.

28. Fie oscilațiile $u_1 = 3 \sin \dfrac{2\pi}{T} t$ (mm) și $u_2 = 4 \sin \dfrac{2\pi}{T} t$ (mm) care produc unde corespunzătoare. Să se calculeze amplitudinea undei rezultate prin interferența celor două unde într-un punct M, știind că diferența de drum este $d = 0{,}50$ cm, viteza de propagare $v = 0{,}5$ cm/s și perioada 4 s.

R: $\Delta\varphi = 2\pi\, d/\lambda$, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} \approx 5$ cm.

29. Prin suprapunerea a două unde produse de două surse care oscilează cu aceeași amplitudine $A_1 = 5$ cm, aceeași frecvență $\nu = 1$ kHz și care sosesc defazate cu $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ într-un punct, rezultă o oscilație cu amplitudinea A. Știind că undele se propagă în mediul respectiv cu viteza $v = 2\,000$ m/s, se cere să se scrie ecuația oscilației rezultante și diferența de drum în punctul considerat.

R: $A = 2A_1 \cos \dfrac{\Delta\varphi}{2}$, $u = 8{,}65 \cdot 10^{-2} \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{10^{-3}} - \dfrac{x}{2}\right)$; $x_2 - x_1 = \dfrac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = \dfrac{\lambda}{6}$.

30. Două surse care oscilează conform ecuațiilor $u_1 = 3 \sin \dfrac{2\pi}{4} t$ (cm) și $u_2 = 2 \sin \dfrac{2\pi}{4} t$ (cm) emit unde plane. Să se calculeze *a)* amplitudinea undei rezultante într-un punct în care diferența între drumul parcurs de cele două unde este de $5 \cdot 10^{-3}$ m. Vitezele de propagare ale celor două unde sînt egale și au valoarea $v = 10^{-1}$ m/s. *b)* Ce valoare ar trebui să aibă diferențele de drum parcurse de cele două unde pînă la punctul considerat, pentru ca amplitudinea să fie maximă? Se consideră undele plane.

R: $4{,}9 \cdot 10^{-2}$ m; $2k \dfrac{\lambda}{2}$.

31. O sursă O aflată într-un mediu elastic produce oscilații de forma $u = 0{,}25 \sin 100\ \pi t$ (mm). Lungimea de undă a undelor plane longitudinale produse este $\lambda = 10$ m. *a)* După cît timp va începe să oscileze un punct M situat la distanța $x = 8$ m față de sursă? *b)* Să se afle defazajul între sursă și punctul M. *c)* La ce distanță pe dreapta OM se află două puncte ale căror oscilații sînt defazate între ele cu $\frac{\pi}{6}$?

R: $t = \frac{xT}{\lambda} = 16 \cdot 10^{-3}$ s; $\Delta\varphi = \frac{x}{\lambda}\ 360° = 288°$; 0,833 m.

32. Cum putem localiza experimental pozițiile nodurilor și ventrelor într-o coardă? Dar într-o coloană de aer?

33. O coardă cu lungimea $l = 15$ m fixată la un capăt primește la celălalt capăt impulsuri ritmice transversale de mică amplitudine cu frecvența $\nu = 2$ Hz. Viteza de propagare a oscilațiilor în coardă este $v = 20$ m/s. Se neglijează toate amortizările. Se cer: *a)* lungimea de undă; *b)* numărul de fuse ce se formează în coardă.

R: $\lambda = \frac{v}{\nu} = 10$ m; $N = \frac{2l}{\lambda} = 3$.

PROBLEME RECAPITULATIVE*

1. Un punct material se mișcă pe un cerc de rază $R = 2{,}00$ m. Care sînt distanțele parcurse și modulele vectorilor deplasare după: *a)* o șesime de cerc; *b)* un sfert de cerc; *c)* o jumătate de cerc; *d)* trei sferturi de cerc; *e)* un cerc întreg?

R: *a)* $\frac{\pi R}{3} = 2{,}10$ m; $R = 2{,}00$ m; *c)* $\pi R = 6{,}28$ m; $2R = 4{,}00$ m;

b) $\frac{\pi R}{2} = 3{,}14$ m; $R\sqrt{2} = 2{,}82$ m; *d)* $\frac{3\pi R}{2} = 9{,}42$ m; $R\sqrt{2} = 2{,}82$ m;

e) $2\pi R = 12{,}56$ m; zero.

2. Un automobil parcurge rectiliniu pe stradă o distanță $d_1 = 10$ m, face un viraj cu raza $R = 10$ m și intră într-o stradă perpendiculară pe care merge $d_2 = 10$ m. Să i se deseneze traiectoria. Care sînt: distanța parcursă și modulul vectorului deplasare?

R: $d \approx 36$ m; $|\vec{\Delta r}| = 28$ m.

3. Un biciclist se mișcă rectiliniu uniform pe o bicicletă. Cum va arăta traiectoria unui punct de pe periferia (obada) roții într-un sistem de coordonate legat de: *a)* roată; *b)* rama bicicletei; *c)* Pămînt?

R: *a)* punct; *b)* cerc; *c)* bucle, asemănătoare unor semicercuri (cicloida).

4. Cum se schimbă graficul coordonatei x și al vitezei v în funcție de t, dacă schimbăm sensul pozitiv ales pe axa Ox a mișcării?

R: trec în simetricele lor față de axa Ot.

5. Să se calculeze vitezele și accelerațiile (momentane) mobilelor, dacă legile mișcărilor sînt: *a)* $x = 3 - 2t$; *b)* $x = 3t^2 + 10$; *c)* $x = 2t^3$.

R: *a)* $v = -2$; $a = 0$;
b) $v = 6t$; $a = 6$;
c) $v = 6t^2$, $a = 12\ t$.

* Aceste probleme nu sînt obligatorii.

6. Ecuația mișcării (rectilinii) unui mobil este: *a)* $x = 2 + 1{,}5t + t^2$; *b)* $x = \frac{1}{2}At^2 + Bt + C$, unde A, B, C sînt constante. Să se scrie legea vitezei și a accelerației.

R: *a)* $v = 1{,}5 + 2t$; $a = 2$;
b) $v = At + B$, $a = A$.

7. O șalupă parcurge distanța dintre două porturi în sensul curgerii rîului în $t_1 = 1{,}00$ h și împotriva curentului în $t_2 = 2{,}00$ h. În cît timp va parcurge această distanță un colac de salvare scăpat în apă?

R: $t = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1} = 4{,}00$ h.

8. Un călător aflat într-un tren de lungime $l_1 = 900$ m, care se mișcă cu viteza $v_1 = 54$ km/h, vede un timp $t_1 = 60$ s un tren vecin de lungime $l_2 = 600$ m, care se mișcă paralel cu primul tren și în același sens. Care este viteza trenului al doilea? Dacă trenurile se vor mișca acum în sensuri opuse, cît timp va vedea fiecare călător trenul celălalt? Care sistem de coordonate este mai potrivit?

R: *SC* legat de primul călător (tren),
$v_2 = v_1 \pm l_2/t_1 = 25$ m/s $= 90$ km/h sau 5 m/s $= 18$ km/h;
$t_2 = t_1l_1/l_2 = 90$ s; $t_1' = \frac{l_2}{v_1 + v_2} = 15$ s sau 30 s;
$t_2' = \frac{l_1}{v_1 + v_2} = 22{,}5$ s sau 45 s.

9. Două avioane zboară unul spre celălalt cu aceeași viteză $v = 576$ km/h fiecare. Care a fost (inițial) distanța dintre ele, dacă un semnal sonor (care se propagă rectiliniu uniform cu viteza $c = 340$ m/s), emis de un avion și reflectat de celălalt, se întoarce înapoi după un timp $T = 68$ s?

R: $d = (c + v)^2\ T/2c = 25$ km.

10. Un autoturism se mișcă cu viteza $v_1 = 22$ m/s în spatele unui autocamion care are viteza $v_2 = 15$ m/s. Cînd distanța dintre autoturism și autocamion devine $d_1 = 20$ m, conducătorul autoturismului se angajează în depășirea autocamionului, dar observă în același timp un autobuz venind din sensul opus cu viteza $v_3 = 18$ m/s. Ce distanță minimă d_3 trebuie asigurată între autobuz și autoturism pentru a efectua în siguranță manevra de depășire, astfel ca, după depășire, autoturismul să fie la distanța $d_2 = 50$ m în fața autocamionului?
Care sistem de coordonate este mai potrivit?

R: *SC* legat de camion; $d_3 = (d_1 + d_2)\frac{v_1 + v_3}{v_1 - v_2} = 400$ m.

11. Un tren se mișcă cu viteza $v = 36$ km/h spre răsărit. Un călător de pe platforma vagonului simte vîntul suflînd dinspre nord. Cînd viteza trenului se dublează, călătorul simte vîntul suflînd dinspre nord-est. Care este viteza și direcția reală a vîntului (față de Pămînt)?

R: $v_0 = v\sqrt{2} = 14{,}1$ m/s dinspre $N - V$.

12. Într-un atelier de reparații dintr-o gară loviturile unui ciocan se succed la un interval de timp $T = 1{,}00$ s. Ce interval de repetiție a loviturilor va înregistra un călător dintr-un tren care se depărtează, respectiv se apropie de gară cu viteza $v = 72$ km/h? Sunetul se propagă rectiliniu uniform cu viteza $c = 340$ m/s.

R: $T' = Tc/(c \mp v) = 1{,}06$ s, respectiv $0{,}95$ s.

13. Un corp pornește uniform accelerat fără viteză inițială și parcurge astfel un drum $d_1 = 6{,}0$ m, după care merge uniform încetinit și parcurge astfel un drum $d_2 = 4{,}0$ m pînă la oprire. Știind timpul total $T = 10{,}0$ s al mișcării, să se calculeze accelerațiile în acele două mișcări.

R: $a_{1,2} = \pm\frac{2}{d_{1,2}T^2}(d_1 + d_2)^2 = 0{,}33$ m/s², respectiv $-\ 0{,}50$ m/s².

14. De un tren de masă $M = 100$ t, care merge rectiliniu uniform, se desprinde la un moment dat ultimul vagon de masă $m = 10$ t. Acesta parcurge o distanță $d = 9{,}0$ km pînă se oprește. La ce distanță de vagon se va găsi în acest moment trenul, dacă forța de tracțiune a locomotivei a rămas aceeași? Toate forțele de frecare sînt proporționale cu greutatea.

R: $s = d\frac{M}{M - m} = 10{,}0$ km.

15. Peste un scripete ideal este trecut un fir cu două corpuri de mase m_1, m_2 la capete. Care este raportul maselor m_2/m_1 dacă după un anumit timp corpul cu masa m_2 a coborît cu $n = 5$-a parte din distanța pe care el ar parcurge-o în căderea liberă în același interval de timp?

R: $m_2/m_1 = (n + 1)/(n - 1) = 1{,}5$.

16. Un corp este aruncat vertical în sus cu o viteză inițială $v_0 = 10$ m/s. Care este viteza v_1 a corpului la timpul t_1, atunci cînd corpul se află la o înălțime egală cu o fracțiune $k = 0{,}19$ din înălțimea maximă la care el poate ajunge? Să se reprezinte pe aceeași diagramă viteza și coordonata corpului în funcție de timp.

R: $v_1 = \pm v_0\sqrt{1 - k} = \pm 9{,}0$ m/s;
$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g} = 1{,}02$ s și $19{,}4$ s.

17. Să se împartă înălțimea $h = 100$ m de la care cade liber un corp în $n = 10$ intervale de lungimi $s_i (i = 1, 2, 3, \ldots 10)$, parcurse în același timp fiecare.

R: $s_i = \frac{2i - 1}{n^2}h (= 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 19$ m).

18. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus, cu aceeași viteză inițială $v_0 = 4{,}9$ m/s, la un interval τ unul după altul. Să se determine τ astfel ca cele două corpuri să se întîlnească la o înălțime egală cu o fracțiune $k = 0{,}36$ din înălțimea maximă la care ele pot ajunge.

R: $\tau = \frac{2v_0}{g}\sqrt{1 - k} = 0{,}8$ s.

19. De la o înălțime $h = 4{,}9$ m cade liber un corp. Cu ce viteză inițială v_0 trebuie aruncat în jos de la aceeași înălțime un al doilea corp, la un interval $\tau = 0{,}5$ s după primul, pentru ca cele două corpuri să se întîlnească chiar la suprafața Pămîntului?

R: $v_0 = \frac{g\tau}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2h/g} - \tau}{\sqrt{2h/g} - \tau} \doteq 7{,}35$ m/s.

20. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale $v_{01} = 60$ m/s și $v_{02} = 40$ m/s, corpul *2* la un interval τ după primul. Care sînt limitele permise ale lui τ pentru ca cele două corpuri să se poată întîlni în aer? (Se va lua $g = 10$ m/s².)

R: $2\,\frac{v_{01} - v_{02}}{g} = 4{,}0\text{ s} < \tau < \frac{2v_{01}}{g} = 12\text{ s}.$

21. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială $v_{01} = 9{,}8$ m/s. După un timp $\tau = 1{,}0$ s se aruncă după el un al doilea corp. Să se afle viteza inițială v_{02} a acestuia astfel ca cele două corpuri să se întîlnească în momentul cînd corpul *2* este la înălțimea sa maximă. Să se reprezinte coordonatele în funcție de timp pe aceeași diagramă.

R: $v_{02} = 7{,}0$ m/s.

22. În drumul unui glonț tras orizontal s-a așezat un paravan de carton la distanța d. Știind diferența de înălțime h dintre pușcă și orificiul făcut de glonț în paravan, să se afle viteza v_0 a glonțului și unghiul α sub care lovește glonțul paravanul (față de direcția orizontală).

R: $v_0 = d\sqrt{g/2h}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{d}$.

23. Un corp a fost aruncat orizontal dintr-un turn și a căzut pe pămînt după $\tau = 0{,}50$ s la distanța $d = 5{,}0$ m (pe orizontală). Să se afle: înălțimea de la care a fost aruncat corpul, viteza inițială v_0, viteza finală v' și unghiul format de ea cu orizontala.

R: $h = \frac{1}{2}g\tau^2 = 1{,}22$ m; $v_0 = d/\tau = 10$ m/s;

$v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 11{,}1$ m/s;

$\operatorname{tg}\alpha' = \sqrt{2gh}/v_0$; $\alpha' = 26°21'$.

24. Un corp este aruncat cu viteza $v_0 = 10$ m/s sub un unghi $\alpha_0 = 45°$ față de orizontală. Corpul lovește un perete situat la o distanță $d = 3{,}0$ m. Să se afle: pe ce porțiune, ascendentă sau descendentă a traiectoriei, se produce ciocnirea; la ce înălțime se produce ciocnirea; viteza v' în momentul ciocnirii?

R: ascendentă ($b = 10$ m); $h = d\operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0} = 2{,}1$ m;

$v' = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 7{,}6$ m/s.

25. Într-o sanie care lunecă liber, fără frecări, pe un plan înclinat de unghi α față de orizontală, este suspendat de tavan printr-un fir un corp. Cu ce unghi θ față de verticală deviază firul în poziția de echilibru relativ a corpului?

R: $\theta = \alpha$ (firul va fi perpendicular pe planul înclinat).

26. Două corpuri de mase $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 2{,}0$ kg sînt așezate pe un plan orizontal și legate între ele printr-un fir orizontal care rezistă pînă la o tensiune maximă $T_{max} = 100$ N. Coeficientul de frecare la alunecare este același pentru ambele corpuri. Cu ce forță orizontală maximă putem trage corpul m_1 pentru a nu se rupe firul în timpul mișcării?

R: $F_{max} = T_{max}\frac{m_1 + m_2}{m_2} = 250$ N.

27. Știind că pentru a menține în echilibru un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$, trebuie aplicată corpului o forță minimă normală pe plan de $n = 2{,}5$ ori mai mare decît o forță minimă orizontală, să se calculeze coeficientul de frecare dintre corp și plan.

R: $\mu = \frac{\cos\alpha}{n - \sin\alpha} = 0{,}43.$

28. De-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ este lansat în sus un corp cu viteza inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s. Coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0{,}20$. Să se afle: înălțimea h la care se ridică corpul, viteza v' cu care revine corpul înapoi la baza planului, timpul de urcare și timpul de coborîre.

R: $h = v_0^2/2g(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha) = 4{,}25$ m; $v' = v_0[(\operatorname{tg}\alpha - \mu) : (\operatorname{tg}\alpha + \mu)]^{1/2} = 8{,}16$ m/s;
$t_u = v_0/g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 1{,}2$ s; $t_c = (v_0/g)\,(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha)^{-1/2} = 1{,}5$ s.

29. O pană cu unghi de deschidere $\alpha = 30°$ este bătută într-un butuc de lemn. Care trebuie să fie coeficientul de frecare minim între pană și butuc pentru ca pana să nu sară înapoi?

R: $\mu = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}27.$

30. Două corpuri de mase $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 2{,}0$ kg sînt așezate pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ și cuplate între ele printr-o tijă fină paralelă cu planul înclinat. Coeficienții de frecare la lunecare sînt respectiv $\mu_1 = 0{,}20$ și $\mu_2 = 0{,}30$. Să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea din tijă.

R: $a = g\frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 2{,}87$ m/s²;

$T = m_1 m_2 g\,\frac{(\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 1{,}02$ N

31. Se trage un proiectil în direcție verticală, de la suprafața Pămîntului. Să se calculeze înălțimea maximă h la care urcă proiectilul, dacă viteza lui inițială este $v_0 = 10$ km/s și raza Pămîntului $R = 6\,400$ km. Se neglijează frecările și rotația Pămîntului.

(*Indicație.* Se consideră sistemul proiectil-Pămînt un sistem izolat și se aplică legea conservării energiei.)

R: $h = v_0^2 R/(2g_0 R - v_0^2) = 2{,}5 \cdot 10^4$ km.

32. De la distanța h de la suprafața Pămîntului se lasă să cadă liber un corp. Care este viteza lui la suprafața Pămîntului, dacă sînt cunoscute g_0, R_P și h ($h \gg R_P$)?

(*Indicație.* Se aplică legea conservării energiei, pentru sistemul corp-Pămînt.)

R: $v^2 = 2h\,g_0\,\frac{R_P}{R_P + h}$.

33. Un vagon cu masa $M = 10$ tone, supus acțiunii unei forțe de frînare constantă, coboară pe un plan înclinat cu unghiul α ($\sin\alpha = 0{,}05$). Vagonul nu are viteză inițială

și, atinge viteze $v = 12$ m/s, după ce a parcurs distanța $d = 200$ m. Să se calculeze forța de frînare ($g = 10$ m/s²).

R: $F = M\left(g \sin \alpha - \frac{v^2}{2d}\right) = 1\,300$ N.

34. Un automobil cu masa $M = 800$ kg coboară cu viteza inițială $v_0 = 60$ km/h, pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală ($\sin \alpha = 0{,}04$). Forța de tracțiune a motorului este constantă. Automobilul sosește la baza planului cu viteza $v_1 = 90$ km/h, după ce a parcurs distanța $d = 200$ m. Forța de frecare dintre cauciucurile automobilului și drum este $F_f = 1\,000$ N. Să se calculeze forța de tracțiune F($g = 10$ m/s²).

R: $F = \frac{M(v_1^2 - v_0^2)}{2d} + F_f - \frac{4Mg}{100} = 1\,400$ N.

35. Un ciocan cu masa $m = 1$ kg lovește cu viteza $v = 5$ m/s un cui care pătrunde în lemn cu $x = 1$ cm. Să se calculeze forța de rezistență a lemnului ($g = 10$ m/s²). Se va neglija greutatea ciocanului în raport cu celelalte forțe.

R: $F_r = \frac{mv^2}{2x} = 1\,250$ N.

36. Un pendul gravitațional simplu de masă $m = 100$ g și de lungime $l = 80$ cm se îndepărtează de poziția de echilibru cu un unghi $\alpha = 30°$. *a)* Să se calculeze viteza și tensiunea din fir cînd pendulul trece prin poziția de echilibru.

b) Să se demonstreze că pentru o anumită valoare a unghiului α, tensiunea din fir, la trecerea pendulului prin poziția de echilibru, este egală cu dublul greutății. Să se calculeze în acest caz această valoare α_1 a unghiului α.

R: *a)* $v^2 = 2gl\,(1 - \cos \alpha)$; $v = 1{,}45$ m/s; $T = mg + \frac{mv^2}{l} = 1{,}24$ N;

b) $T_1 = mg\cos \alpha_1 + 2\,mg\,(1 - \cos \alpha_1) = 2\,mg$; $\alpha_1 = 60°$.

37. De ce deviază ramura unui copac atunci cînd de pe ea își ia zborul o pasăre?

R: conservarea impulsului.

38. De un aerostat, aflat în repaus în atmosferă, este legată o scară de sfoară pe care stă un om. Masa aerostatului cu scară este M, iar a omului m. Ce viteză va avea aerostatul,dacă omul începe să urce pe scară cu viteza u *față de scară?* Cîtă energie cinetică dezvoltă omul punîndu-se în mișcare?

R: $v' = -\frac{m}{m+M}u$; $\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}u^2$.

39. Doi patinatori de mase $m_1 = 70$ kg și $m_2 = 50$ kg, ținînd de capetele unei sfori, stau pe gheața lucioasă unul în fața celuilalt. Primul din ei începe să tragă de sfoară scurtînd-o cu viteza $u = 1{,}20$ m/s. Cu ce viteză se vor mișca patinatorii? (Se neglijează frecările.)

R: $v_1 = \frac{m_2 u}{m_1 + m_2} = 0{,}50$ m/s; $v_2 = -\frac{m_1 u}{m_1 + m_2} = -0{,}70$ m/s.

40. Trei bărci merg una după alta cu viteza v fiecare. În fiecare barcă se află cîte un om, astfel încît masa bărcii și a omului este M, iar în barca din mijloc mai există doi saci de masă m fiecare. Din barca din mijloc sînt aruncați cei doi saci, unul spre barca din față, celălalt spre barca din spate, cu aceeași viteză *relativă u față de barcă* înainte de aruncare. Care vor fi vitezele finale ale bărcilor, dacă sacii sînt aruncați: *a)* simultan; *b)* succesiv?

R: *a)* $v_1 = v + \frac{m}{M+m}u$, $v_2 = v$, $v_3 = v - \frac{m}{M+m}u$;

b) $v_1 = v + \frac{m}{M+m}u$, $v_2 = v + \frac{m^2 u}{M(M+m)}$; $v_3 = v - \frac{m(M+2m)}{(M+m)^2}u$

sau $v_1 = v + \frac{m(M+2m)}{(M+m)^2}u$; $v_2 = v - \frac{m^2 u}{M(M+m)}$; $v_3 = v - \frac{m}{M+m}u$.

41. Două bile de mase $m_1 = 0{,}173$ kg, $m_2 = 0{,}200$ kg se mișcă pe direcții perpendiculare cu vitezele $v_1 = 10{,}0$ m/s, respectiv $v_2 = 5{,}0$ m/s. După ciocnire bila m_2 se oprește. Care va fi viteza primei bile după ciocnire?

Să se traseze diagrama conservării impulsului total.

R: $\vec{v_1'} = \frac{1}{m_1}(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2})$; $v_1' = \frac{1}{m_1}\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} = 11{,}5$ m/s.

42. Față de care puncte se conservă momentul cinetic al unei particule care lovește oblic și perfect elastic un perete (fig. 5.8)? Care este momentul cinetic în raport cu normala la perete în punctul de contact?

R: față de punctele normalei la perete în punctul de contact; zero.

43. La pendulul conic (fig. 3.61), față de care punct se conservă momentul cinetic al particulei și ce valoare are? Care este variația pe unitatea de timp a momentului cinetic față de punctul de suspensie?

R: față de centrul cercului; $L = mvr = ml \sin^2 \alpha \sqrt{gl \cos \alpha}$; $\vec{L}$ este vertical; $|\Delta\vec{L}/\Delta t| = |\vec{M}| = mgr = mgl \sin \alpha$; $\Delta\vec{L}/\Delta t = \vec{M}$ este tangent la cerc.

44. O particulă se mișcă liber, fără frecare, sub acțiunea forței de greutate, pe suprafața interioară a unei sfere. Să se arate că momentul cinetic al particulei față de diametrul vertical al sferei se conservă.

45. Două particule de aceeași masă m se mișcă rectiliniu uniform cu viteze egale în sensuri opuse pe două drepte paralele. Să se arate că momentul cinetic total în raport cu orice punct din spațiu, nu depinde de alegerea acestui punct.

R: $\vec{L} = (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times m\vec{v}$.

46. O bilă de masă $m = 0{,}100$ kg, legată de un centru fix printr-un fir de lungime $l_1 = 0{,}60$ m, execută o mișcare circulară uniformă pe un plan orizontal neted fără frecări cu turația $n_1 = 1{,}00$ rot/s. Ce turație va avea bila, dacă firul se scurtează pînă la lungimea $l_2 = 0{,}30$ m? Ce lucru mecanic a efectuat forța care a scurtat firul?

R: $n_2 = n_1 l_1^2/l_2^2 = 4{,}0$ rot/s; $W = \frac{1}{2}m4\pi^2 n_1^2 l_1^2 (l_1^2/l_2^2 - 1) = 2{,}12$ J.

Fig. R—47. Pentru problema 47.

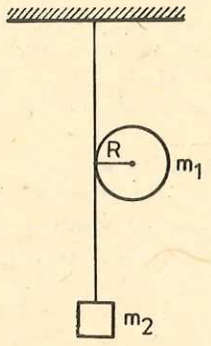
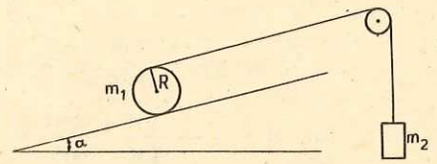


Fig. R—48. Pentru problema 48.



47. Un cilindru de masă m_1 are înfăşurat în jurul său un fir de care este suspendat la capătul liber un corp cu masa m_2 (fig. R—47). Calculaţi tensiunile din fire şi acceleraţia cu care coboară cilindrul cunoscînd raza R şi momentul de inerţie al cilindrului I.

Indicaţie. Cunoscînd m_1, m_2, R şi I se determină a, T_1 şi T_2 din relaţiile: $m_1a = m_1g + T_2 - T_1$; $0 = m_2g - T_2$; $m_1g\,R = (I + m_1R^2)\varepsilon$, $a = \varepsilon R$.

R: $T_1 = g\left(\dfrac{m_1 I}{I + m_1R^2} + m_2\right)$; $\quad T_2 = m_2g$:

$$a = \frac{m_1gR^2}{I + m_1R^2}.$$

48. Pe un plan înclinat de unghi α este aşezat un corp rotund, omogen, de masă m, rază R şi moment de inerţie I. Corpul rotund este legat de un alt corp de masă m_2, prin intermediul unui fir inextensibil trecut peste un scripete cu inerţia neglijabilă (fig. R — 48). *a)* Care este coeficientul de frecare minim necesar pentru ca să nu alunece corpul? *b)* Să se calculeze acceleraţia mişcării corpului şi tensiunea din fir. Aplicaţie numerică: corpul este o sferă; $m_1 = m_2$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}20$.

Indicaţie. Din relaţiile: $m_1g \sin \alpha - T - F_f = m_1a_1$; $T - m_2g = m_2a_2$; $a_2 - a_1 = \varepsilon R$: $(F_f - T)\,R = \varepsilon I$, se scot F_f, a_1 şi T. Din condiţia $F_f < \mu gm \cos \alpha$ rezultă $\mu_{min} < \mu$.

R: *a)* $\mu_{min} = 0{,}154 < \mu$, deci nu avem alunecare;
b) $a = 0{,}205\ g$; $T = 0{,}47\ m_1g$.

49. Un fir trecut peste un scripete de inerţie neglijabilă are la un capăt un cilindru plin de masă m_1 şi rază R iar la celălalt un corp de masă m_2 (fig. R—49). Să se afle acceleraţia mişcării corpului m_2, în cazul cînd cilindrul nu alunecă pe suprafaţa orizontală.

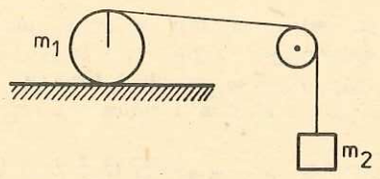


Fig. R—49. Pentru problema 49.

(*Indicaţie.* Dacă cilindrul se rostogoleşte pe plan atunci se poate scrie:

$$T + F_f = (1/2)m_1a;\ m_2g - T = m_2a;\ (T - F_f)\,R = (1/2)\,m_1R^2\,\frac{a}{m_2}$$

şi de aici rezultă a.)

R: $a = \dfrac{g}{1 + \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{m_1}{m_2}}$ m/s²

50. Un om cu masa m_1 se deplasează pe circumferinţa de rază r a unui disc orizontal, aflat iniţial în repaus. Discul are masa m_2 şi raza R şi se poate roti uşor în jurul unui ax vertical care trece prin centrul său. Cu ce viteză unghiulară ω se roteşte discul, cînd omul se deplasează cu viteza v faţă de disc?

(*Indicaţie.* Se scrie conservarea momentului cinetic pentru cele două corpuri: $L = I\,\omega + I_1\omega$ unde $L = m_1\,rv$; $I\,\omega =$ momentul cinetic al discului; $I_1\omega =$ momentul cinetic pentru om. De aici rezultă valoarea lui ω.)

R: $\omega = \dfrac{m_1rv}{\dfrac{1}{2}\,m_2R^2 + m_1r^2}$.

51. Cinci forţe acţionează asupra unui punct material. Punctul de aplicaţie comun al forţelor se află într-unul din vîrfurile unui hexagon regulat, iar extremităţile lor în celelalte vîrfuri. Să se afle rezultanta forţelor, luînd mărimea, celei mai mari dintre ele egală cu 1 N.

R: $R = 3$ N.

52. Două resorturi R_1 şi R_2 de mase neglijabile şi de lungimi egale, se alungesc respectiv cu $\Delta l_1 = 1$ cm, sub acţiunea unei forţe deformatoare $F_1 = 0{,}1$ N şi cu $\Delta l_2 = 120$ mm, pentru o forţă $F_2 = 1$ N. Se suspendă resorturile în două puncte C_1 şi C_2 aflate în acelaşi plan orizontal. Se fixează o tijă rigidă, de masă neglijabilă, la extremităţile libere A_1 şi A_2, ale resorturilor. Apoi se atîrnă o greutate G într-un punct D al tijei.

a) Să se determine poziţia punctului D, caracterizată prin raportul DA_1/DA_2, pentru ca tija $A_1\,A_2$ să rămînă orizontală.

b) Să se determine alungirea suplimentară Δl a resorturilor, cînd greutatea G creşte cu $\Delta G = 1$ N.

R: *a)* $DA_1/DA_2 = k_2/k_1 = 5/6$;

b) $\Delta l = \dfrac{\Delta G}{k_1 + k_2} = 5{,}45$ cm.

53. Un cilindru gradat are grosimea $e = 2$ mm, înălţimea $h = 20$ cm şi diametrul interior $D_1 = 4$ cm. Baza cilindrului are diametrul $D_2 = 6$ cm şi grosimea $e = 2$ mm.

a) Să se determine poziţia centrului de greutate al cilindrului gradat, în raport cu punctul aflat la jumătatea înălţimii cilindrului.

b) Se umple cilindrul cu apă pînă la jumătate, să se determine și în acest caz poziția centrului de greutate al cilindrului în raport cu același punct.

R: *a)* $x = \dfrac{G_2}{G_1 + G_2}\,\dfrac{h+e}{2} = 0{,}98$ cm;

b) $y = \dfrac{1}{G_1+G_2+G_3}\left[(G_1+G_2)\,x + G_3\,\dfrac{h}{4}\right] = 2{,}84$ cm.

54. Un tub cilindric care conține o anumită cantitate de mercur, plutește în apă scufundîndu-se cu $h = 10$ cm din lungimea sa. Într-un lichid de densitate necunoscută, tubul plutește scufundîndu-se cu $h' = 12{,}5$ cm din lungimea sa. Să se determine densitatea relativă a lichidului, față de apă.

R: $d = \dfrac{h}{h'} = 0{,}8.$

55. Pe un cărucior se află un vas cilindric în care se găsește apă pînă la înălțimea h, față de baza cilindrului. În peretele cilindrului, pe părți diametral opuse sînt făcute două orificii identice, cu secțiunea $S = 10^{-3}$ m². Un orificiu se află la înălțimea $h_1 = 0{,}25$ m, iar celălalt la înălțimea $h_2 = 0{,}5$ m, față de baza cilindrului.
Să se determine sensul și intensitatea forței ce trebuie aplicată căruciorului, pentru ca acesta să rămînă în repaus, cînd se deschid orificiile și prin acestea începe să curgă apă.

R: $F = 2\rho S g(h_2 - h_1) = 4{,}9$ N.

56. Un ceas cu pendul care bate secunda ($T_0 = 2$ s) la suprafața Pămîntului este mutat la o altitudine $h = 200$ m în aceeași localitate. Ce influență va avea această mutare asupra mersului ceasului? Cu cîte secunde se va modifica mersul lui în $D = 24$ ore? Raza Pămîntului $R = 6\,400$ km.

R: $T = 2\pi\left(1 + \dfrac{h}{R}\right)\sqrt{\dfrac{l}{g_0}} = \left(1 + \dfrac{h}{R}\right)T_0;$

$\Delta t = D\left(\dfrac{T_0}{T} - 1\right) = -2{,}70$ s, întîrziere.

57. Densitatea unui corp de mici dimensiuni este $\rho = 2{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³. Acest corp este suspendat de un fir și determinat să oscileze într-un mediu cu densitatea $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m³. Aflați ce relație există între perioada de oscilație T a pendulului care oscilează în acest mediu și perioada lui de oscilație în vid T_0. Se neglijează forțele de frecare.

R: $T = T_0\sqrt{\dfrac{\rho}{\rho - \rho_0}}.$

58. Știind că energia totală a unui oscilator armonic este $E = \dfrac{1}{2}kA^2$ și energia potențială $E_p = \dfrac{1}{2}ky^2$, să se reprezinte într-un sistem de axe E și y graficul energiei cinetice și potențiale a oscilatorului armonic.

59. O oscilație armonică $y = A \sin \omega t$ se propagă ca o perturbație transversală cu viteza $v = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ m/s de la origine de-a lungul axei x, $A = 1 \cdot 10^{-2}$ m și $\omega = \pi/2$ rad/s. Să se determine: *a)* perioada T, frecvența ν și lungimea de undă λ; *b)* ecuația undei; *c)* imaginea momentană (un desen la scară) a perturbației după $t_1 = 4$ s; $t_2 = 6$ s; $t_3 = 9$ s.

60. Legea de propagare a undei plane într-un mediu elastic, omogen și izotrop este $u = A \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$. *a)* Cum se reflectă planeitatea undei în această expresie? *b)* Ce condiție trebuie pusă intervalului de timp t, pentru ca expresia matematică a legii să aibă sens fizic?

R: dacă unda pleacă din $x = 0$ la $t = 0$ atunci $\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda} \geqslant 0$ sau $t \geqslant \dfrac{x}{v}$.

61. Două surse de oscilație S_1 și S_2 emit unde de amplitudine $A_1 = 2$ mm și respectiv $A_2 = 5$ mm. Frecvența undelor emise este $\nu = 160$ Hz, iar viteza lor de propagare în mediul considerat este $v = 320$ m/s. Să se afle amplitudinea de oscilație a unui punct situat la distanța $x_1 = 6{,}5$ m de prima sursă și $x_2 = 32/3$ m de a doua sursă, știind că cele două surse oscilează în fază.

R: $A = 6{,}8$ mm.

62. O săniuță de masă m lunecă liber pe un plan înclinat de la o înălțime h, apoi se oprește undeva pe planul orizontal. Ce lucru mecanic trebuie efectuat, pentru a aduce săniuța înapoi la locul de plecare?

R: $2mgh$.

63. De ce vîna de apă dintr-un robinet (în curgere lentă și lină, neturbulentă) se îngustează treptat pe măsură ce coboară?

R: $Sv = \text{const}$, v crește, deci S scade.

64. Putem măsura masele cu un dinamometru, dacă avem la dispoziție și o cutie cu etaloane de masă?

R: da (prin metoda substituției).

65. Un corp este tîrît uniform pe un plan orizontal cu unghiul de frecare φ, cu ajutorul unei forțe care face unghiul α cu orizontala. Pentru ce valoare a unghiului α forța de tracțiune va fi minimă?

R: $\alpha = \varphi$ (unghi de frecare).

66. Doi pescari trebuie să treacă peste un rîu exact în punctul opus. Amîndoi vîslesc cu aceeaşi viteză $v_b = 2{,}0$ m/s faţă de apă, iar viteza apei este peste tot $v_a = 1{,}2$ m/s. Primul orientează barca astfel încît înaintează rectiliniu şi ajunge exact în punctul opus într-un timp t_1. Celălalt orientează barca perpendicular pe ţărm, ajunge lîngă celălalt mal, apoi vîsleşte de-a lungul acestui mal pînă ajunge în acelaşi punct final în timpul t_2. Care este raportul t_1/t_2 ?

R: $t_1/t_2 = \sqrt{\dfrac{v_b - v_a}{v_b + v_a}} = 1/2.$

67. Un pescar mergînd cu barca în susul rîului scapă, în dreptul unui pod, un colac în apă. După un timp $\tau = 1/2$ h îşi dă seama de aceasta şi se întoarce înapoi, găsind colacul la distanţa $d = 5{,}0$ km mai departe de pod. Care este viteza apei, dacă pescarul vîsleşte mereu cu aceeaşi intensitate? Care sistem de referinţă este mai potrivit?

R: *SC* legat de apă; $v = d/2\tau = 5{,}0$ km/h.

68. Experienţa arată că particulele mici care cad liber în aer întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă (de frecare) proporţională cu viteza particulei şi orientată în sensul opus vitezei: $\vec{F_r} = -\vec{kv}$, unde k este o constantă de proporţionalitate. Viteza acestor particule atinge destul de repede o valoare maximă (limită) *constantă*. Să se calculeze această viteză limită de cădere liberă, dacă masa particulelor este m=10 mg şi constanta de proporţionalitate $k = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ N · s/m.

R: $c = mg/k = 4{,}9$ cm/s.

69. O bilă de masă $m = 100$ g este suspendată printr-un fir de tavanul unui vagon. Cînd vagonul merge uniform frînat, firul cu bila se află în echilibru relativ, deviat cu unghiul $\theta = 60°$, faţă de verticală. Să se afle acceleraţia vagonului şi tensiunea din fir.

R: $a = -g\operatorname{tg}\theta = -17$ m/s²; $T = mg/\cos\theta = 1{,}96$ N.

70. Un tren începe să frîneze uniform, parcurgînd astfel o distanţă $s = 180$ m pînă la oprire. Un pendul simplu suspendat în vagon este deviat (la echilibru relativ) cu unghiul $\theta = 5°$ în timpul frînării. Care a fost viteza iniţială a trenului?

R: $v_0 = \sqrt{2gs \cdot \operatorname{tg}\theta} = 17{,}6$ m/s.

71. Un corp este aruncat (în vid) cu viteza iniţială $v_0 = 20$ m/s sub un unghi $\alpha_0 = 45°$ faţă de orizontală. După cît timp şi la ce înălţime vectorul viteză formează un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala?

R: $t = \dfrac{v_0}{g}\cos\alpha_0(\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}\alpha) = 0{,}63$ s;

$$y = \frac{1}{2g}v_0^2\cos^2\alpha_0(\operatorname{tg}^2\alpha_0 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 6{,}8 \text{ m}.$$

72. Două corpuri sînt aruncate simultan din acelaşi punct cu aceeaşi viteză iniţială $v_0 = 10$ m/s sub unghiurile $\alpha_1 = 30°$, respectiv $\alpha_2 = 60°$. Care este distanţa d dintre corpuri după $t = 2{,}0$ s?

R: $d = 2v_0t\sin(\alpha_2 - \alpha_1)/2 = 11{,}3$ m.

73. O ţintă de pe un deal se vede sub unghiul β faţă de orizontală. Distanţa pe orizontală pînă la ţintă este d. Ştiind viteza iniţială v_0 a obuzului, să se afle unghiul α_0 de tragere. Care este viteza minimă necesară pentru a atinge ţinta?

R: $\operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{v_0^2}{gd} \pm \sqrt{\dfrac{v_0^4}{g^2d^2} - \dfrac{2v_0^2}{gd}\operatorname{tg}\beta - 1}$; $v_0 \geqslant \sqrt{\dfrac{gd}{\cos\beta}(\sin\beta + 1)}$.

74. Un corp este aşezat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 60°$, fără frecări. Cu ce acceleraţie va luneca liber corpul de-a lungul planului înclinat, dacă acesta este împins cu o acceleraţie orizontală $a' = 5{,}0$ m/s²?

R: $a = g\sin\alpha \mp a'\cos\alpha = 6{,}2$ m/s² sau 10,7 m/s².

75. Într-un lift care se mişcă cu o acceleraţie $a' = 2{,}2$ m/s² îndreptată în sus, este fixat pe podea un plan înclinat neted fără frecări, care formează un unghi $\alpha = 30°$ cu podeaua. Cu ce acceleraţie va coborî liber de-a lungul planului, un corp de masă $m = 1{,}0$ kg aşezat pe acest plan înclinat? Care va fi apăsarea pe plan?

R: $mg\sin\alpha = m(a - a'\sin\alpha)$; $N - mg\cos\alpha = ma'\cos\alpha$, de unde $a = (g + a')\sin\alpha = 6{,}0$ m/s²; $N = m(g + a')\cos\alpha = 10{,}4$ N.

76. De o parte şi de alta a unui dublu plan înclinat (unghi diedru) cu unghiurile $\alpha_1 = 30°$ şi $\alpha_2 = 60°$ faţă de orizontală, sînt aşezate două corpuri de masă m_1, respectiv m_2, legate printr-un fir trecut peste un scripete ideal din vîrful planului. Se neglijează frecările. Diferenţa de nivel dintre corpuri este iniţial $h = 1{,}00$ m. După $\tau = 0{,}70$ s cele două corpuri ajung la acelaşi nivel. Care este raportul maselor?

R: $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{g\tau^2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\sin\alpha_1 + 2h}{g\tau^2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\sin\alpha_2 - 2h} = 3{,}0.$

77. De ce la elicoptere, pe lîngă elicea mare cu axa verticală, mai există încă o elice mică la coadă, cu axa orizontală?

R: pornind elicea mare, corpul elicopterului s-ar roti în sens invers (conservarea momentului cinetic), ceea ce este împiedicat de elicea mică.

78. Într-o barcă aflată pe un lac stau la capete doi elevi. Masa lor şi a bărcii este M. Primul elev aruncă celui de-al doilea o minge de masă m cu viteza u faţă de apă. Cu ce viteză relativă va lovi mingea pe al doilea elev?

R: $v_{rel} = u\dfrac{M + m}{M}$.

79. Un corp de masă m_1 loveşte cu viteza v_1 un alt corp de masă m_2 aflat în repaus. După ciocnire direcţiile de mişcare ale corpurilor formează unghiurile θ_1, respectiv θ_2 cu direcţia iniţială de mişcare ($\vec{v_1}$) a primului corp. Să se afle vitezele finale.

R: $v_1' = \dfrac{v_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$; $v_2' = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{v_1\sin\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

80. Pe o masă este întins un lanţ. Un capăt al lanţului, de care este prins un corp greu de dimensiuni neglijabile, atîrnă liber peste marginea mesei. Cînd porţiunea de lanţ de pe masă are lungimea l_0, lanţul începe să lunece. Să se calculeze viteza lanţului în momentul cînd el părăseşte masa.

R: $v = \sqrt{gl_0}$

Indicaţie: dacă m este masa lanţului şi M masa corpului greu atunci iniţial: $Mg + m\dfrac{l - l_0}{l}g = \mu m\dfrac{l_0}{l}g$. Scăderea energiei potenţiale $\left(M + m\dfrac{l - l_0}{l}\right)gl_0 + m\dfrac{l_0}{l}g \cdot \dfrac{l_0}{2}$ este egală cu energia cinetică $(M + m)v^2/2$ plus lucrul mecanic al forţei de frecare $\mu m\dfrac{l_0}{l}g \cdot \dfrac{l_0}{2}$.

Nr. colilor de tipar : 20
Bun de tipar : 29.02.1988

Com. nr. 70371/34 030
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.